

# Temas selectos de matemáticas 2

*Tlahuizcalpantecuhtli Ruiz Villalobos*

**DGB**



*Serie Iso*





# Temas selectos de matemáticas 2

Primera edición 2026

Copyright © Editorial Planea

ISBN: En trámite

Impreso en México

Contacto: 771-655-6186

Correo electrónico:  
informes@editorialplanea.com.mx

Se reservan todos los derechos. Está prohibida la reproducción, almacenamiento en sistemas de recuperación o transmisión de estas publicaciones, ya sea de forma electrónica, mecánica, mediante fotocopia, grabación u otros medios, sin el consentimiento previo del editor. Esto incluye su distribución en redes, almacenamiento electrónico o transmisión para fines de aprendizaje a distancia.

**Editor en jefe:** Cosme Lorenzo Rodríguez

**Autor:** Tlahuizcalpantecuhtli Ruiz Villalobos

**Correctora:** Angélica María Alvarado Carreón

**Diseño:** Nasbbi Irazú Portes Loeza

**Imágenes:** Adobe Stock

## Aviso de exención de responsabilidad:

Los enlaces incluidos en este libro no son propiedad de Editorial Planea, por lo que no se tiene control sobre la información proporcionada por los sitios web en un momento determinado, ni se puede garantizar la exactitud de la información proporcionada por terceros (enlaces externos). Aunque la información se recopila con cuidado y se actualiza de manera constante, no se asume responsabilidad alguna por su exactitud, integridad o actualidad.

Los artículos atribuidos a los autores reflejan sus opiniones y, a menos que se indique de forma específica, no representan las opiniones del editor. Además, la reproducción de este libro o cualquier material de los sitios web incluidos en él no está autorizada, ya que dicho material puede estar sujeto a derechos de propiedad intelectual.

Los derechos pertenecen a sus respectivos propietarios, y Editorial Planea no se hace responsable de la información mostrada en los enlaces proporcionados.



# Presentación

Bienvenido a un viaje emocionante que redibuja la conexión esencial entre las estructuras fundamentales de la Matemática. Este libro te invita a explorar cómo el simple acto de iterar una función (el corazón de los Sistemas Dinámicos Discretos) se convierte en la llave para desvelar el orden oculto detrás del caos y la belleza autosimilar de los fractales.

Se comienza con el estudio de composiciones de funciones para modelar la evolución temporal, lo que conduce de forma directa a la comprensión de la dependencia respecto a las condiciones iniciales, característica central del caos determinista. Al analizar la complejidad que surge a partir de reglas simples (como el caso del mapa logístico), se fomenta en el lector una intuición sólida sobre el Pensamiento Matemático, con énfasis en la estructura, el orden y las relaciones que sustentan los fenómenos presentes en la naturaleza y la tecnología.

El camino de lo discreto a lo continuo es el puente didáctico central de esta obra. La comprensión de las sucesiones y las iteraciones ofrece un marco natural para revisar el Teorema Fundamental del Cálculo y el concepto de integral. Visualizar la suma de las iteraciones no es solo un preámbulo, sino una deducción lógica del cálculo del área debajo de la curva, ligando la dinámica discreta a la formalidad del Análisis Matemático.

Esta perspectiva unificada culmina en la introducción formal a las Ecuaciones Diferenciales. Partiendo de los principios de cambio instantáneo que son la base del Cálculo, se aborda el origen y la formulación de estas ecuaciones como modelos de evolución continua.

Pensando en el estudiante moderno, se incluye un amplio abanico de métodos numéricos que no solo ofrecen soluciones prácticas, sino que refuerzan la relación entre la iteración discreta y la aproximación continua. Este enfoque didáctico permite al lector deducir y aplicar las herramientas con una comprensión profunda, preparando el terreno para el estudio avanzado en disciplinas como la Física, la Biología, la Economía y la Ingeniería. Es una obra indispensable para quien busca dominar el Cálculo Diferencial e Integral y sus aplicaciones más fascinantes, transformando la percepción de la matemática de un conjunto de reglas a un lenguaje de la dinámica universal.



# La Nueva Escuela Mexicana NEM

La Nueva Escuela Mexicana (NEM) parte de un diagnóstico donde la educación se entendía como tres ciclos sin conexión, la educación básica (preescolar, primaria y secundaria), la educación media superior y la educación superior, con base en este diagnóstico se construye una propuesta donde la educación debe ser entendida para toda la vida, bajo el concepto de aprender a aprender, la actualización continua, adaptación a los cambios y el aprendizaje permanente.

La NEM propone un plan de 23 años en los diferentes niveles educativos, los cuales estén interconectados entre sí, donde se potencialice la formación integral de las niñas, niños, adolescentes y jóvenes con el objetivo de promover el aprendizaje de excelencia, inclusivo, pluricultural, colaborativo y equitativo a lo largo de su formación.

Para alcanzar el bienestar y la prosperidad incluyente, la NEM se fundamenta en los siguientes principios:



**Fomento de la identidad con México.** El amor a la patria, el aprecio por su cultura, el conocimiento de su historia y el compromiso de los valores plasmados en la Constitución Política, son las acciones que forman este principio.

**Responsabilidad ciudadana.** El principio implica la aceptación de derechos y deberes personales y comunes, el respeto por los valores cívicos por parte de los estudiantes formados en la NEM es esencial para transmitir los valores de honestidad, respeto, justicia, solidaridad, reciprocidad, lealtad, libertad, equidad y gratitud.



**Honestidad.** Se destaca este valor dentro de la responsabilidad social de los estudiantes, el cual permite formar una sociedad con base en la confianza y el sustento de la verdad de todas las acciones para permitir una sana relación entre los ciudadanos.

**Respeto de la dignidad humana.** Promover el respeto irrestricto a la dignidad y los derechos humanos de las personas, con base en la convicción de la igualdad de todos los individuos en derechos, trato y oportunidades.





**Respeto por la naturaleza y cuidado del medio ambiente.** La conciencia ambiental favorece la protección y conservación del medio ambiente, la prevención de la contaminación y cambio climático comienza con la educación del desarrollo sostenible.

**Promoción de la interculturalidad.**

El aprecio y la comprensión por la diversidad cultural y lingüística, así como, el diálogo y el intercambio cultural es una fuerza motriz para tener una vida intelectual, afectiva, moral y espiritual.



**Participación en la transformación de la sociedad.**

La superación de cada persona por iniciativa propia es la base de este principio, el sentido social de la educación permite construir relaciones cercanas, solidarias y fraternas que superan las indiferencias y la apatía por transformar la sociedad.



**Promoción de la cultura de la paz.** El objetivo de la agenda 2030 que promueve "Paz, justicia e instituciones sólidas", tiene como fundamento promover sociedades pacíficas, inclusivas, que faciliten el desarrollo sostenible, el acceso a la justicia para todos y la construcción a todos los niveles de instituciones eficaces e inclusivas que rindan cuentas.





# Conoce tu libro

Dentro del libro se encuentra desarrollado el Nuevo Modelo Educativo de la Educación Media Superior, el cual se basa en un programa de estudio por progresiones de aprendizaje, las cuales se desarrollan en tres momentos que son:



**Apertura.** En este primer momento se busca despertar el interés y la motivación del estudiante por el tema que se va a abordar.



**Cierre.** En este último momento se busca consolidar los aprendizajes y hacer una evaluación del proceso.



**Desarrollo.** Se presenta el contenido y se realiza una explicación clara y detallada de los conceptos clave.



También se encuentran las secciones:

**Evaluación diagnóstica.** Se encuentra al inicio de cada unidad de aprendizaje, ayuda a identificar las fortalezas y debilidades con los temas que se van a abordar.

## Aprendizaje situado en contextos:



**Escuela**



**Aula**



**Comunidad**



## Prácticas transversales.

Donde se enlazan los aprendizajes de los recursos socio-cognitivos con las disciplinas de las áreas de conocimiento.

## Prácticas socioemocionales.

El currículum ampliado se vincula con los recursos sociocognitivos, áreas de conocimiento por medio de los diferentes ámbitos de los recursos socioemocionales que están presentes en este tipo de actividades.





**Prácticas de aprendizaje.** La mejor manera de aplicar los conocimientos y habilidades aprendidas es a través de este tipo de prácticas, las cuales están numeradas, ubicadas en un contexto de aprendizaje y potencializando un principio de la NEM, como se muestra en el siguiente ejemplo:



## Práctica de aprendizaje



**Lectura NEM.** Es una actividad de comprensión lectora que aborda uno de los principios de la Nueva Escuela Mexicana.



**Evaluación de la unidad de aprendizaje.** Son reactivos que abordan los temas de cada unidad de aprendizaje.

**Categorías, subcategorías y metas de aprendizaje.** Cada progresión tiene al inicio las categorías, subcategorías y metas de aprendizaje que aborda su contenido como se muestra a continuación:

Categorías de aprendizaje

Subcategoría de aprendizaje

C1 S1 S2  
M1 M2

Metas de aprendizaje



**Proyecto Aula - Escuela - Comunidad (PAEC).** En estos códigos QR podrás realizar las actividades de las progresiones que son parte del PAEC.

**Maestro Iso.** Cada vez que veas al maestro Iso, él te explicará la progresión de manera dinámica, escaneando el código QR.



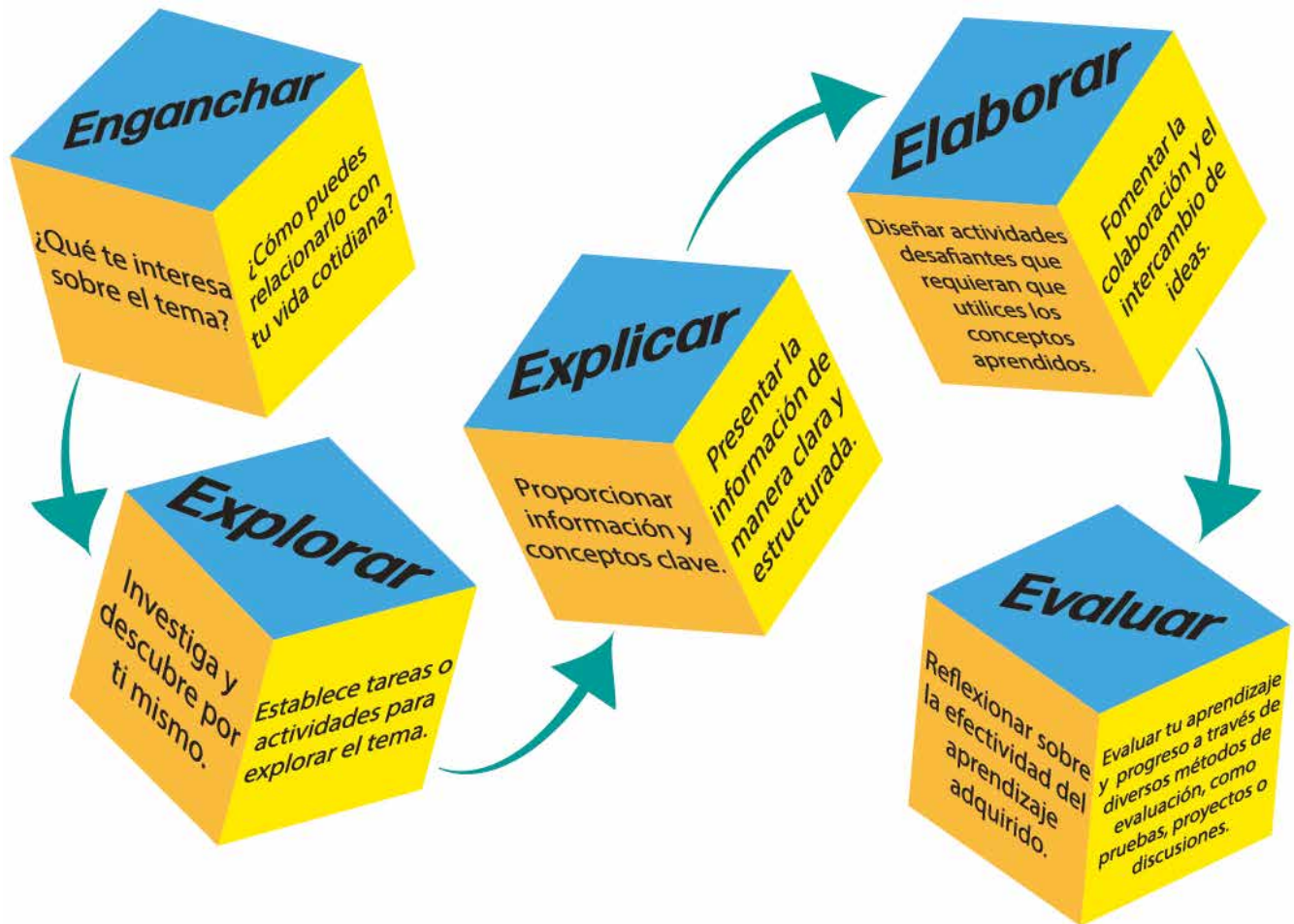
# Progresiones de aprendizaje

1. Examina una problemática en la que se necesite aplicar la composición de funciones de variable real, particularmente la composición de una función consigo misma, con lo cual explora la definición de sistema dinámico discreto y algunos ejemplos sencillos que remitan a la recurrencia y la autosimilitud, posteriormente observa propiedades y algunos resultados históricamente importantes que han dado solución a problemas o situaciones reales como lo son el Atractor de Lorenz o el estudio del Caos.
2. Revisa los conceptos de sucesión y serie, examinando algunos ejemplos (sucesiones aritméticas, geométricas, Fibonacci, serie aritmética y geométrica) con los cuales puede observar los conceptos de límite y convergencia e identifica estructuras en su entorno que poseen patrones, comportamientos repetitivos o fractales, apoyándose de herramientas tecnológicas disponibles.
3. Aproxima el área debajo de una curva utilizando el método de Suma de Riemann considerando una suma finita de términos. Luego emplea la idea del límite al considerar una cantidad infinita de ellos con lo cual calcula el área debajo de la curva observando cómo ello se concreta en la integral definida. Interpreta esta suma de términos como un área infinitesimal y observa su utilidad en la solución de problemas de otras Unidades de Aprendizaje Curricular, aprovechando los recursos tecnológicos disponibles.
4. Calcula integrales indefinidas de funciones polinomiales de manera analítica, en particular de funciones lineales y cuadráticas, considerando las expresiones correspondientes y observando la relación con el cálculo de área debajo de la gráfica considerando la integral definida apoyado de recursos tecnológicos, con lo cual revisa algunas propiedades de la integral que le permitan entenderla desde una perspectiva más formal.
5. Reconoce a la derivada y la integral como procesos inversos a partir del análisis de la antiderivada lo cual le permita establecer el Teorema Fundamental del Cálculo, con ello observa la relación que existe entre la gráfica de una función, la gráfica de su derivada y la gráfica de su antiderivada, establece cómo el cambio de la pendiente en cada punto de la gráfica de la derivada refiere al cambio instantáneo de la gráfica principal y cómo este comportamiento también se da entre la gráfica de la función principal respecto a la gráfica de su antiderivada lo anterior con la finalidad de abordar la solución de problemáticas de otras Unidades de Aprendizaje Curricular haciendo uso de recursos tecnológicos disponibles.
6. Analiza situaciones-problema provenientes de Unidades de Aprendizaje Curricular que pueden ser modelados a partir del uso de ecuaciones diferenciales, por ejemplo, el crecimiento poblacional, la propagación de una enfermedad contagiosa o modelos más complejos como el modelo presa-predador o el modelo de Kuramoto, con lo cual pueda observar cómo problemas reales o fenómenos pueden describirse y entenderse a través de expresiones matemáticas, con lo cual examina la utilidad de la derivada y la integral, usando herramientas tecnológicas para la exploración.
7. Considera los métodos numéricos como procesos matemáticos iterativos que permiten aproximar una solución con cierto margen de error, revisa algunos de los métodos más populares. como el método de bisección, el método de aproximaciones sucesivas o el método Newton-Raphson, haciéndose consciente que, la iteración numérica puede provocar resultados totalmente diferentes dependiendo del redondeo o truncamiento numérico, con lo cual da partida para explorar la definición de sistemas caóticos y sensibilidad de condiciones iniciales en sistemas.

# Estrategias para trabajo colaborativo

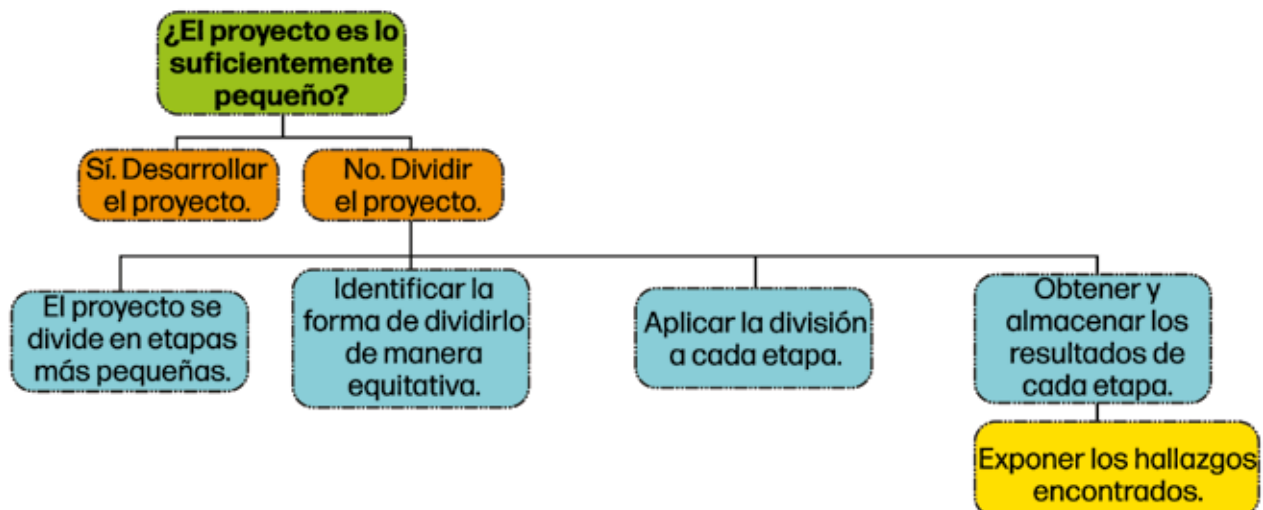
## Estrategia 5E

Es una estrategia utilizada en educación para el trabajo colaborativo y diseño de proyectos, consiste en:



## Divide y vencerás

Consiste en no ver un proyecto como una unidad, sino como una serie de etapas que pueden desarrollarse de manera individual para después integrar y exponer los hallazgos encontrados, a continuación se muestran los pasos a seguir.



# Contenido

## Unidad de aprendizaje 1. Funciones e integración

Modelación de sistemas dinámicos discretos.

Sucesiones, series y patrones.

Cálculo de áreas bajo la curva.

Cálculo de integrales.

## Unidad de aprendizaje 2. Aplicación del cálculo

Relación entre derivación e integración.

Ecuaciones diferenciales.

Métodos numéricos.





- **C2M2** Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieran explicación o interpretación.
- **C2M3.** Compara hechos, opiniones o afirmaciones para organizarlos en formas lógicas útiles en la solución de problemas y explicación de situaciones y fenómenos.
- **C2M4.** Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.
- **C3M1.** Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto.
- **C3M3.** Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas.
- **C4M1.** Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.

#### Aprendizaje de trayectoria:

- Valora la aplicación de procedimientos automáticos y algorítmicos, así como la interpretación de sus resultados para anticipar, encontrar y validar soluciones a problemas matemáticos, de áreas del conocimiento y de su vida personal.
- Adopta procesos de razonamiento matemático tanto intuitivos como formales tales como observar, intuir, conjeturar y argumentar, para relacionar información y obtener conclusiones de problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades y de la vida cotidiana).
- Modela y propone soluciones a problemas tanto teóricos como de su entorno, empleando lenguaje y técnicas matemáticas.
- Explica el planteamiento de posibles soluciones a problemas y la descripción de situaciones en el contexto que les dio origen empleando lenguaje matemático y lo comunica a sus pares para analizar su pertinencia.

#### Progresiones:

1. Examina una problemática en la que se necesite aplicar la composición de funciones de variable real, particularmente la composición de una función consigo misma, con lo cual explora la definición de sistema dinámico discreto y algunos ejemplos sencillos que remitan a la recurrencia y la autosimilitud, posteriormente observa propiedades y algunos resultados históricamente importantes que han dado solución a problemas o situaciones reales como lo son el Atractor de Lorenz o el estudio del Caos.
2. Revisa los conceptos de sucesión y serie, examinando algunos ejemplos (sucesiones aritméticas, geométricas, Fibonacci, serie aritmética y geométrica) con los cuales puede observar los conceptos de límite y convergencia e identifica estructuras en su entorno que poseen patrones, comportamientos repetitivos o fractales, apoyándose de herramientas tecnológicas disponibles.
3. Aproxima el área debajo de una curva utilizando el método de Suma de Riemann considerando una suma finita de términos. Luego emplea la idea del límite al considerar una cantidad infinita de ellos con lo cual calcula el área debajo de la curva observando cómo ello se concreta en la integral definida. Interpreta esta suma de términos como un área infinitesimal y observa su utilidad en la solución de problemas de otras Unidades de Aprendizaje Curricular, aprovechando los recursos tecnológicos disponibles.

4. Calcula integrales indefinidas de funciones polinomiales de manera analítica, en particular de funciones lineales y cuadráticas, considerando las expresiones correspondientes y observando la relación con el cálculo de área debajo de la gráfica considerando la integral definida apoyado de recursos tecnológicos, con lo cual revisa algunas propiedades de la integral que le permitan entenderla desde una perspectiva más formal.

## Presentación

El mundo alrededor no es estático; está en constante evolución. Desde el crecimiento de una población biológica hasta la fluctuación de los mercados financieros, el cambio es la única constante. Este libro es una invitación a explorar las reglas matemáticas que gobiernan esta evolución, un viaje que comienza con una idea tan simple como potente: la composición de una función consigo misma.

Imagina un proceso donde el resultado de hoy determina la entrada de mañana. En matemáticas, esto se traduce en la iteración de una función de variable real,  $f(x)$ ,  $f(f(x))$ ,  $f(f(f(x)))$ , y así de manera sucesiva. Esta simple operación, la base de la recurrencia, es la puerta de entrada formal a los Sistemas Dinámicos Discretos. A través de ejemplos sencillos y modelos fundamentales, se desentrañará cómo una regla determinista puede generar una secuencia infinita de estados.

Lo que resulta fascinante es la complejidad que emerge de estas dinámicas. Al explorar las órbitas y puntos fijos de estas iteraciones, pronto descubrirás la propiedad de la autosimilitud, un fenómeno donde la estructura del todo se repite en cada una de sus partes, sin importar la escala. Esta idea conecta de forma directa con el mundo de los fractales, estructuras geométricas que desafían la intuición euclidiana y reflejan la belleza intrincada de la naturaleza (como en las costas o los árboles).

Sin embargo, el verdadero giro conceptual ocurre al profundizar en el concepto de Caos. Lejos de ser sinónimo de desorden, el caos en matemáticas es un tipo de complejidad organizada, caracterizada por la dependencia sensible a las condiciones iniciales, la famosa “teoría del aleteo de la mariposa”. Un cambio infinitesimal en el punto de partida conduce a trayectorias radicalmente diferentes con el tiempo.

Para entender el profundo impacto de esta teoría, se examinarán resultados de gran relevancia histórica. Se estudia el trabajo de pioneros como Edward Lorenz, quien, al simplificar un modelo de convección atmosférica, identificó el primer ejemplo de un atractor caótico: el Atractor de Lorenz, una figura que refleja la naturaleza impredecible del clima.

El estudio de estos sistemas dinámicos y la teoría del Caos no es un mero ejercicio teórico. Ha proporcionado soluciones y entendimientos vitales en campos que van desde la predicción meteorológica hasta el diseño de algoritmos para el cifrado de datos y la comprensión de las arritmias cardíacas. Este momento busca dotarte de la estructura y el rigor del Pensamiento Matemático necesario para modelar, analizar e interpretar estos sistemas complejos, transformando tu perspectiva sobre la relación entre el orden, el caos y la realidad. ¿Estás listo para ver cómo la iteración más simple puede desatar la complejidad del universo?

Proyecta tu futuro

**Unidad de aprendizaje 1.  
Funciones e integración**

Progresión 1  
Modelación de  
sistemas dinámicos  
discretos

Progresión 2  
Sucesiones, series y  
patrones

Progresión 3  
Cálculo de áreas bajo  
la curva

Progresión 4  
Cálculo de integrales



# Evaluación diagnóstica

1. Dadas las funciones  $f(x) = x^2 - 1$  y  $g(x) = 2x + 3$ . Calcula el valor de  $(f \circ g)(1)$ . (5 puntos)  
\_\_\_\_\_
2. Usando las mismas funciones  $f(x)$  y  $g(x)$ , encuentra la expresión algebraica de  $(g \circ f)(x)$ . (5 puntos)  
\_\_\_\_\_
3. Sean  $h(x) = x$  y  $j(x) = x + 4$ . (10 puntos)
  - a) Determina  $(h \circ j)(x)$ .
  - b) Determina  $(j \circ h)(x)$ .¿Son estas composiciones iguales?  
\_\_\_\_\_
4. La función  $k(x)$  está definida como  $k(x) = 1/(x-2)^3$ . Encuentra dos funciones,  $f(x)$  y  $g(x)$ , tales que  $k(x) = (f \circ g)(x)$ . (10 puntos)
  - a)  $f(x) =$  \_\_\_\_\_
  - b)  $g(x) =$  \_\_\_\_\_
5. Dadas  $f(x) = 1/x$  y  $g(x) = x - 5$ . ¿Cuál es el dominio de la función compuesta  $(f \circ g)(x)$ ? (10 puntos)  
\_\_\_\_\_
6. Una secuencia comienza con  $A_1 = 4$  y cada término siguiente se obtiene sumando 3 al término anterior. Encuentra el valor de  $A_5$ . (5 puntos)  
\_\_\_\_\_
7. Una inversión inicial de \$1000 genera un interés del 10 % cada periodo sobre el monto total. Sea  $I_n$  el monto después de  $n$  periodos. Escribe la relación de recurrencia que define  $I_{n+1}$  en términos de  $I_n$ . (5 puntos)
  - a)  $I_{n+1} =$  \_\_\_\_\_
8. Considera la función  $f(x) = 2x - 1$ . Si el estado inicial es  $X_0 = 3$ , calcula las siguientes tres iteraciones: (10 puntos)
  - a)  $X_1 = f(X_0) =$  \_\_\_\_\_
  - b)  $X_2 = f(X_1) =$  \_\_\_\_\_
  - c)  $X_3 = f(X_2) =$  \_\_\_\_\_
9. Dada la función  $g(x) = 0.5x + 10$ . Si el sistema evoluciona de forma repetida usando esta regla, ¿hacia qué valor tenderá a estabilizarse? (Es decir, encuentra el punto fijo  $x^*$  donde  $g(x^*) = x^*$ ). (10 puntos)  
\_\_\_\_\_
10. Considera la función  $h(x) = x^2 - 2$ . Calcula las primeras cuatro iteraciones si la condición inicial es  $X_0 = 2$ . ¿El resultado crece o decrece? (10 puntos)  
\_\_\_\_\_

# Modelación de sistemas dinámicos discretos

S1 S2 S3

M1 M2 M3 M4

Enganchar

1



Apertura

## Glosario

### Iteración

Es el acto o proceso de repetir un conjunto de instrucciones, pasos o cálculos varias veces.

La palabra proviene del latín *iteratio*, que significa repetición. En términos simples, cada vez que se completa el ciclo de repetición, se ha realizado una iteración. Los resultados de una iteración se suelen utilizar como punto de partida para la siguiente.

También es esencial en el estudio de los sistemas dinámicos y los fractales.

La matemática que han aprendido hasta ahora se centra mucho en la causa y el efecto directo: si se conoce el valor de entrada, se puede calcular la salida. Pero ¿qué pasa cuando la salida de un proceso se convierte en la entrada del mismo proceso una y otra vez? Aquí es donde la composición de una función consigo misma (iteración) se vuelve una herramienta poderosa.

Este concepto te introduce al mundo de los Sistemas Dinámicos Discretos. Imagina el crecimiento de una población, la fluctuación del mercado de valores, o incluso el clima; todos estos son sistemas que evolucionan paso a paso. En matemáticas, esta evolución se modela mediante una relación de recurrencia, donde el estado futuro, depende del estado actual a través de una función. Esto es la iteración de la función.

Exploraras cómo estas iteraciones pueden generar patrones que exhiben autosimilitud (como en los fractales) y, de manera sorprendente, cómo en sistemas en apariencia simples puede surgir un comportamiento tan impredecible y sensible denominado Caos. Al final, entenderás por qué el famoso Atractor de Lorenz, aunque modelado con ecuaciones continuas, ilustra a la perfección el concepto de la dependencia sensible a las condiciones iniciales, el corazón de la Teoría del Caos. Este viaje te mostrará una matemática que no solo describe el orden, sino también la complejidad y la maravilla de la impredecibilidad.



## Desarrollo

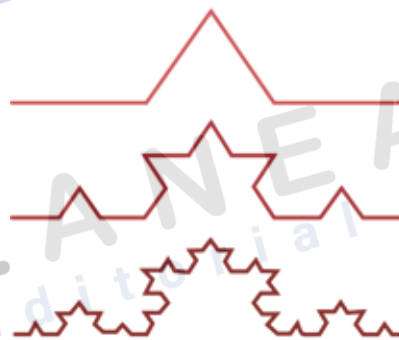
2 Explorar

Unidad 1

Antes de dar comienzo, experimenta con algunos trazos para ver cómo funcionan las iteraciones en geometría.

La Curva de Koch (o Copo de Nieve de Koch cuando se aplica a un triángulo) es uno de los primeros ejemplos de fractal, una forma geométrica con una estructura que se repite a diferentes escalas (autosimilitud).

Su elaboración es un proceso iterativo que se repite infinitas veces. A continuación, se detallan las instrucciones para la curva base:



3 Explicar

### Paso 1: La semilla (Iteración $n = 0$ )

1. Comienza con un **segmento de recta**  $L$  de longitud determinada.

### Paso 2: La primera transformación (Iteración $n = 1$ )

2. **Divide** el segmento  $L$  en **tres partes iguales**. Cada nueva parte tendrá una longitud de  $L/3$ .
3. **Elimina** el segmento central (el tercio medio).
4. Sobre el espacio vacío, **reemplázalo** con **dos nuevos segmentos** de longitud  $L/3$  cada uno, de modo que formen dos lados de un **triángulo equilátero** (con un ángulo de  $60^\circ$  hacia afuera).

El segmento original ha sido reemplazado por cuatro segmentos más pequeños.

### Paso 3: Iteración sucesiva (Iteración $n \rightarrow \infty$ )

5. Repite el paso 2 en cada uno de los cuatro nuevos segmentos que se crearon en el paso anterior.
  - Cada uno de estos segmentos se divide en tres partes iguales.
  - El tercio medio de cada uno se elimina y se sustituye por dos segmentos.
6. Continúa este proceso de forma indefinida. Cuantas más iteraciones se realicen, más se aproximará el dibujo a la verdadera curva fractal de Koch.
  - Ahora, dibuja un triángulo para realizar un fractal. Se llama el triángulo de Sierpinski. Es uno de los fractales más conocidos y su construcción se basa en la eliminación repetida de triángulos centrales. A continuación, se presentan las instrucciones.



¡Escanéame!

## 1. La semilla (Iteración $n = 0$ )

1. Dibuja un triángulo equilátero grande y sólido (relleno) en una hoja de papel. Este es tu punto de partida, o Iteración 0.

## 2. Primera iteración ( $n = 1$ )

2. Encuentra el punto medio de cada uno de los tres lados del triángulo grande.
3. Conecta estos tres puntos medios para formar un nuevo triángulo en el centro. Este triángulo central estará invertido con respecto al original.
4. Elimina (o deja sin rellenar/en blanco) el triángulo central que acabas de dibujar.

Después de esta primera iteración, te quedarán tres triángulos equiláteros sólidos más pequeños en las esquinas, cada uno con la mitad de la longitud del lado del triángulo original.

## 3. Iteraciones sucesivas ( $n \rightarrow \infty$ )



5. Repite el proceso anterior (pasos 2 y 3) de forma simultánea en cada uno de los tres triángulos sólidos que quedan en las esquinas.
  - En cada uno de los tres triángulos de las esquinas, encuentra los puntos medios de sus lados.
  - Conéctalos para formar un nuevo triángulo central invertido en cada uno.
  - Elimina los tres nuevos triángulos centrales.
6. Continúa aplicando esta regla a los triángulos restantes en cada paso. Por ejemplo, en la tercera iteración, tendrás 9 triángulos sólidos en las esquinas, y eliminarás 9 nuevos triángulos centrales.

El Triángulo de Sierpinski es la figura que resulta al repetir este proceso infinitas veces. Cuantas más iteraciones dibujes, más se acercará tu figura a la estructura fractal original.



Este video es para crear el mismo triángulo con la técnica de kirigami (papel y tijeras).



¡Escanéame!

A continuación, se presentan algunos problemas clásicos para abordar la modelación de sistemas.

**Ejemplo 1:** El préstamo recurrente (Sistema dinámico lineal)

**Problema:** Una persona pide un préstamo de \$100 000 a un banco que aplica un interés fijo del 5 % mensual sobre el saldo actual. Además, la persona se compromete a pagar una cuota fija de \$10 000 al final de cada mes. Modele la deuda como un sistema dinámico discreto.

**Solución:** Sea  $D_n$  la deuda al final del mes  $n$ . La deuda inicial es  $D_0 = 100\,000$ . La regla de recurrencia (la función de iteración) es:

$D_{n+1} =$  Aumento del 5 % de interés  $1.05 \cdot D_n -$  Pago mensual 10 000.

La función iteradora es  $f(D) = 1.05D - 10\,000$ .

- Deuda mes 1 ( $D_1$ ):

$$f(D_0) = 1.05(100\,000) - 10\,000 = 105\,000 - 10\,000 = \$95\,000$$

- Deuda mes 2 ( $D_2$ ):

$$f(D_1) = f(f(D_0)) = f_2(D_0) = 1.05(95\,000) - 10\,000 = 99\,750 - 10\,000 = \$89\,750$$

- Deuda mes 3 ( $D_3$ ):

$$f(D_2) = f_3(D_0) = 1.05(89\,750) - 10\,000 = 94\,237.5 - 10\,000 = \$84\,237.5$$

Este es un sistema dinámico discreto lineal. Si se itera de forma infinita, se observa si la deuda se estabiliza (punto fijo,  $D^* = f(D^*)$ ) o si crece/decrece.

En este caso,  $D^* = 1.05D^* - 10\,000 \Rightarrow 0.05D^* = 10\,000 \Rightarrow D^* = 200\,000$ . Si la deuda inicial fuera menor a \$200 000, la deuda converge a cero.

**Ejemplo 2:** El modelo logístico de crecimiento poblacional

**Problema:** El mapa logístico,  $P_{n+1} = r P_n (1 - P_n)$ , se usa para modelar el crecimiento de una población  $P_n$  (donde  $0 \leq P_n \leq 1$ ) con recursos limitados. Sea  $r = 3.2$ . Determine la población después de 3 generaciones si la población inicial es  $P_0 = 0.5$ .

**Solución:** La función iteradora es  $f(P) = 3.2 P (1 - P)$ .

- Generación 1 ( $P_1$ ):  $f(P_0) = 3.2(0.5)(1-0.5) = 3.2(0.25) = 0.8$

- Generación 2 ( $P_2$ ):  $f(P_1) = f_2(P_0) = 3.2(0.8)(1-0.8) = 3.2(0.8)(0.2) = 0.512$

- Generación 3 ( $P_3$ ):  $f(P_2) = f_3(P_0) = 3.2(0.512)(1-0.512) \approx 3.2(0.512)(0.488) \approx 0.7995$

Este sistema, dependiendo del parámetro  $r$ , puede mostrar puntos fijos, ciclos periódicos o Caos. Para  $r = 3.2$ , se observa que la población parece entrar en un ciclo de periodo 2, alternando entre dos valores.

### Ejemplo 3: Autosimilitud y fractales

**Problema:** Considere la función  $f(x) = 1/3x + 1/3$  definida en el intervalo  $[0, 1]$ . Si se comienza con el intervalo  $I_0 = [0, 1]$  y se aplica la función a ambos extremos,  $f([0, 1]) = [1/3, 2/3]$ , y después a los nuevos extremos, ¿qué patrón de iteración se forma al considerar  $I_{n+1}$  como la unión de  $f(I_n)$  y  $f(I_n + 2/3)$ ?

**Solución:** Este ejemplo ilustra la construcción del Conjunto de Cantor y la Autosimilitud.

#### 1. Iteración 1:

- $f(0) = 1/3$
- $f(1) = 1/3 + 1/3 = 2/3$
- $f(I_0) = [1/3, 2/3]$  (Se elimina el primer tercio y el último tercio).
- $I_1 = [1/3, 2/3]$ .

#### 2. Iteración 2:

- Se aplica  $f$  a los subintervalos de  $I_1$ :  
 $I_2 = f(I_1) = [1/3 \cdot 1/3 + 1/3, 1/3 \cdot 2/3 + 1/3] = [4/9, 5/9]$



¡Escanéame!

El patrón descrito en el problema es una simplificación de una construcción fractal. Un fractal se define por su autosimilitud, donde cada parte se parece al todo. En un sistema dinámico, esto se refleja en las órbitas que se repiten a diferentes escalas.

### Ejemplo 4: El Atractor de Lorenz (Dependencia sensible)

**Problema:** Aunque el Atractor de Lorenz se describe por un sistema continuo de ecuaciones diferenciales, su análisis en la Teoría del Caos muestra la dependencia sensible a las condiciones iniciales (el Efecto Mariposa).



¡Escanéame!

**Solución:** El Atractor de Lorenz es un concepto fundamental en la Teoría del Caos. Consiste en un atractor extraño (un conjunto límite al que tienden las trayectorias de un sistema dinámico) derivado de un sistema de tres ecuaciones diferenciales no lineales, formuladas por el meteorólogo Edward Lorenz en 1963.

El atractor describe el comportamiento a largo plazo de un sistema dinámico determinista (es decir, su evolución está determinada por sus condiciones iniciales) que, sin embargo, exhibe un comportamiento caótico e impredecible.

## 1. Las ecuaciones de Lorenz

El atractor se genera a partir del Sistema de Lorenz, un modelo simplificado de la convección atmosférica (movimiento del aire calentado desde abajo). Las ecuaciones son:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y-x) \\ \frac{dy}{dt} = x(\rho-z) - \gamma \\ \frac{dz}{dt} = x\gamma - \beta z \end{cases}$$

Donde:

- $x, y, z$  son las variables que describen el estado del sistema (velocidad de flujo, distribución de temperatura, etcétera).
- $\sigma$  (número de Prandtl),  $\rho$  (número de Rayleigh) y  $\beta$  son parámetros constantes. Para los valores clásicos ( $\sigma = 10, \rho = 28, \beta = 8/3$ ), el sistema exhibe caos.

## 2. Forma de mariposa (Atractor extraño)

Cuando se grafican las trayectorias de las variables ( $x, y, z$ ) en un espacio tridimensional, el atractor adopta una forma característica de mariposa o de doble espiral (dos "alas"). Este es un atractor extraño porque:

- Tiene una estructura fractal: posee detalles complejos que se repiten a escalas cada vez más pequeñas.
- No es un punto ni un ciclo límite (órbita periódica), sino un conjunto de dimensión no entera (fractal).





 Cierre

 **Práctica de aprendizaje** 

Investiga las siguientes preguntas y discute en clase las respuestas:

- ¿Cuál es la forma característica del Atractor de Lorenz?
 

---

---

---
- ¿Qué tienen en común esta forma y la función  $\cos(x)$  del ejercicio inicial en términos de ser atractores?
 

---

---

---
- ¿Qué se entiende por un Atractor extraño?
 

---

---

---
- ¿Qué característica geométrica (relacionada con la autosimilitud y la complejidad) tienen estos atractores?
 

---

---

---

2. Análisis de autosimilitud y recurrencia:

- Recurrencia: Investiga qué ocurre con una trayectoria en el Atractor de Lorenz. La trayectoria nunca se repite de forma exacta, pero permanece confinada a la forma de las alas. Explica cómo esta dinámica es un tipo de recurrencia donde las órbitas se aproximan infinitamente a sí mismas sin cerrarse.
 

---

---

---
- Autosimilitud: Investiga qué es la Dimensión Fractal y cómo se aplica al Atractor de Lorenz. Explica por qué el atractor se considera un objeto que exhibe autosimilitud (la complejidad y el detalle se repiten a diferentes escalas) y cómo esto se relaciona con la idea de que los sistemas caóticos son infinitamente complejos.
 

---

---

---





# Estudio independiente

Responde las siguientes preguntas.

5 **Evaluar**

Unidad 1

1. ¿Qué es una sucesión y qué es una serie?

---

---

---

---

---

---

---

---

2. ¿Qué ejemplos de sucesiones y series puedes identificar?

---

---

---

---

---

---

---

---

3. ¿Qué es el límite de una sucesión y qué significa que una sucesión sea convergente?

---

---

---

---

---

---

---

---

4. ¿Qué estructuras en tu entorno muestran patrones, comportamientos repetitivos o fractales?

---

---

---

---

---

---

---

---



# Estudio independiente

5. ¿Qué herramientas tecnológicas pueden ayudarte a estudiar sucesiones, series y patrones?

---

---

---

---

---

6. ¿Qué aprendiste sobre ti al reflexionar sobre sucesiones, series y patrones en tu entorno?

---

---

---

---

---

Crterios	Nivel Avanzado (3 pts.)	Nivel Intermedio (2 pts.)	Nivel Básico (1 pt.)
<b>Reconozco qué es la composición de funciones</b>	Analizo cómo se construyen funciones iteradas y su papel en sistemas dinámicos.	Explico que se usa el resultado como nueva entrada.	Digo que es aplicar la función dos veces.
<b>Identifico qué es un sistema dinámico discreto y sus propiedades</b>	Reconozco puntos fijos, ciclos, bifurcaciones y caos en su evolución.	Explico que se repite y puede estabilizarse.	Digo que cambia paso a paso.
<b>Relaciono estos conceptos con ejemplos reales y resultados históricos</b>	Reflexiono sobre el Atractor de Lorenz, el caos y su impacto en ciencia y sociedad.	Explico que ayudan a entender fenómenos naturales.	Digo que se descubrieron cosas nuevas.

### Revisa tu desempeño:

9 puntos - Excelente.

De 6 a 8 puntos - Bien.

De 4 a 5 puntos - Suficiente.

3 puntos - Insuficiente.

# Sucesiones, series y patrones

S1 S2 S3

M1 M2 M3 M4

Unidad 1

Enganchar

1



Apertura

Imagina por un momento un universo caótico y aleatorio, sin patrones ni regularidades. Sería un mundo impredecible, donde ninguna ley matemática pudiera revelar sus secretos. Sin embargo, la experiencia ha demostrado lo contrario: la naturaleza repite estructuras, los fenómenos siguen regularidades y hasta el azar parece esconder un orden subyacente.

Las sucesiones y series matemáticas son el lenguaje que permite describir este orden. Desde el simple conteo 1, 2, 3, 4, 5... hasta el crecimiento de una población de conejos descrito por Fibonacci, son patrones numéricos que modelan realidades tangibles.

Al estudiar las sucesiones aritméticas, se reconoce aquello que crece de forma constante (los ahorros que aumentan cada mes, los árboles plantados en fila). Las sucesiones geométricas, en cambio, representan crecimientos explosivos (los intereses compuestos, la división celular, los memes que se vuelven virales). En el corazón de muchos organismos, la sucesión de Fibonacci despliega su elegante secuencia, que rige la disposición de las hojas en un tallo o de las semillas en un girasol.

Pero ¿qué ocurre cuando se suman estos patrones? Las series (aritméticas y geométricas) permiten entender totalidades: el ahorro acumulado en un año, la distancia total recorrida por Aquiles en su carrera contra la tortuga, o la paradoja de cómo infinitos términos pueden sumar un valor finito. Aquí emerge un concepto fundamental: el límite, esa frontera hacia la cual tienden los términos de una sucesión o las sumas parciales de una serie, abriendo las puertas al cálculo infinitesimal y a la comprensión de lo infinito.

Este viaje matemático no se detiene en lo abstracto. Al salir al mundo, puedes descubrir que estos patrones se materializan en formas físicas: los fractales, estructuras que repiten su patrón a diferentes escalas, desde las ramificaciones de un relámpago hasta la costa irregular de un continente. Estas figuras de complejidad infinita confrontan con paradojas sorprendentes: ¿cómo puede algo tener perímetro infinito, pero área finita?

En esta unidad, se recurrirá a herramientas tecnológicas, desde GeoGebra hasta la programación visual, para revelar estos patrones, modelar comportamientos repetitivos y comprender cómo las matemáticas permiten descifrar el orden oculto del mundo que te rodea.

Prepárate para descubrir que incluso en lo aparentemente caótico, subyace una estructura matemática esperando ser revelada.



## Tipos y ejemplos de sucesiones y series

Una sucesión es una lista ordenada e infinita de números  $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$  que siguen una regla. Una serie es la suma de esos términos  $(a_1 + a_2 + a_3 + \dots)$ .

### I. Sucesiones $\{a_n\}$

Las sucesiones se definen por su término general  $(a_n)$  o por una relación de recurrencia (cómo se relaciona un término con el anterior).

#### 1. Sucesiones aritméticas (progresión aritmética)

Son aquellas donde la diferencia entre un término y el anterior es constante.

- Diferencia común  $(d)$ :  $d = a_n - a_{n-1}$
- Término general  $(a_n)$ :  $a_n = a_1 + (n - 1) d$

**Ejemplo:**  $\{3, 7, 11, 15, 19, \dots\}$

$$a_1 = 3, d = 4.$$

$$a_n = 3 + (n - 1) 4$$

#### 2. Sucesiones geométricas (progresión geométrica)

Son aquellas donde el cociente (la razón) entre un término y el anterior es constante.

- Razón común  $(r)$ :

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

- Término general  $(a_n)$ :

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

**Ejemplo:**  $\{2, 6, 18, 54, 162, \dots\}$

$$a_1 = 2, r = 3.$$

$$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$$

### 3. Sucesión de Fibonacci (Recurrencia)

Es un ejemplo clásico de sucesión definida por recurrencia (cada término depende de los anteriores, no de  $n$ ). Con frecuencia se encuentra en patrones biológicos.

- Regla: Cada término es la suma de los dos anteriores. Relación:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ (para } n \geq 3)$$

**Ejemplo:** {0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34...}

### II. Series ( $\sum a_n$ )

Una serie es la suma de los términos de una sucesión. Para saber si la suma de una serie infinita tiene un valor, se analiza el límite de la suma parcial ( $S_n$ ).

Suma Parcial ( $S_n$ ): La suma de los primeros  $n$  términos de la sucesión.

Convergencia: Una serie converge si  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  es un número finito. Si no, diverge.

#### 1. Serie aritmética

La suma de los términos de una progresión aritmética.

- Suma de los primeros  $n$  términos ( $S_n$ ):

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

- Comportamiento: Las series aritméticas, en general, divergen (la suma tiende a infinito) porque los términos individuales no tienden a cero (excepto si  $d = 0$  y  $a_1 = 0$ ).

#### 2. Serie geométrica

La suma de los términos de una progresión geométrica.

- Suma de los primeros  $n$  términos ( $S_n$ ):

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \text{ (si } r \neq 1)$$

- Convergencia (Clave): Una serie geométrica infinita converge solo si el valor absoluto de la razón es menor que 1 ( $|r| < 1$ ).

- Suma infinita ( $S$ ): Si converge, la suma es:

$$S = \frac{a_1}{1-r} \text{ (si } |r| < 1)$$

**Ejemplo:** La serie  $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots$  converge a  $S = \frac{1}{1-1/2} = 2$

## Práctica de aprendizaje



Realiza los siguientes ejercicios en tu libreta.

### Sucesiones Aritméticas (PA)

1. Determina el término general ( $a_n$ ) para la sucesión  $\{10, 15, 20, 25, \dots\}$ .
2. Si una PA tiene  $a_1 = 5$  y el sexto término  $a_6 = 30$ , ¿cuál es la diferencia común ( $d$ )?
3. Calcula el décimo término ( $a_{10}$ ) de la sucesión  $\{1.5, 3, 4.5, 6, \dots\}$ .
4. La sucesión  $\{100, 93, 86, 79, \dots\}$  es una PA. ¿Cuál es el primer término negativo?
5. Escribe los primeros cinco términos de una PA donde  $a_1 = 2$  y  $a_3 = 8$ .

### Sucesiones geométricas (PG) y Fibonacci

6. Determina el término general ( $a_n$ ) para la sucesión  $\{3, 12, 48, 192, \dots\}$ .
7. En una PG, si el primer término es  $a_1 = 4$  y el quinto término es  $a_5 = 324$ , ¿cuál es la razón común ( $r$ )? (Asume  $r > 0$ ).
8. Calcula el séptimo término ( $a_7$ ) de la PG donde  $a_1 = 1000$  y  $r = 1/10$ .
9. ¿Cuál es el noveno término ( $a_9$ ) de la sucesión de Fibonacci, sabiendo que  $a_1 = 1$  y  $a_2 = 1$ ?
10. ¿A qué valor (límite) converge la sucesión geométrica  $\{10, 5, 2.5, 1.25, \dots\}$  cuando  $n \rightarrow \infty$ ?

### Series Aritméticas ( $S_n$ )

11. Calcula la suma de los primeros 12 términos ( $S_{12}$ ) de la serie aritmética que comienza con  $a_1 = 4$  y  $d = 3$ .
12. Determina la suma de los primeros 20 números pares positivos ( $2 + 4 + 6 + \dots$ ).
13. ¿Cuál es la suma ( $S_n$ ) de los términos de la PA  $\{1, 5, 9, 13, \dots, 41\}$ ?
14. Una pila de troncos tiene 10 troncos en la fila inferior, 9 en la siguiente, y así de forma sucesiva hasta 1 en la fila superior. ¿Cuántos troncos hay en total?
15. Si la suma de los primeros 5 términos de una serie aritmética es  $S_5 = 50$  y  $a_1 = 4$ , ¿cuál es el quinto término ( $a_5$ )?

### Series Geométricas ( $S_n$ y $S$ )

16. Calcula la suma de los primeros 4 términos ( $S_4$ ) de la serie geométrica  $2 + 6 + 18 + 54 + \dots$ .
17. Determina la suma infinita ( $S$ ) de la serie  $1 + 1/3 + 1/9 + 1/27 + \dots$ .
18. La serie ¿converge o diverge? Justifica tu respuesta.
19. El valor de  $0.3333\dots$  puede representarse como una serie geométrica  $3/10 + 3/100 + 3/1000 + \dots$ . Usa la fórmula de la suma infinita para encontrar su equivalente fraccionario.
20. En un proceso iterativo, la distancia que recorre un objeto en cada rebote es el 80 % de la distancia anterior. Si el primer rebote es de 10 metros, ¿cuál es la distancia total máxima que podría recorrer?

■ **Tabla 1. Ejemplos de series y sucesiones conocidas**

	NOMBRE	SUCECIÓN	REGLA DE FORMACIÓN
Sucesiones	Enteros positivos	1, 2, 3, 4, 5, ...	$a_n=n$
	Pares positivos	2, 4, 6, 8, 10, ...	$a_n=2n$
	Impares positivos	1, 3, 5, 7, 9, ...	$a_n=2n-1$
Sucesiones Notables	Números triangulares	1, 3, 6, 10, 15, ...	$a_n=\frac{n(n+1)}{2}$
	Números tetraédricos	1, 4, 10, 20, 35, ...	$a_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
	Números pentagonales	1, 5, 12, 22, ...	$a_n=\frac{n(3n-1)}{2}$
	Números hexagonales	1, 6, 15, 28, ...	$a_n=n(2n-1)$
	Cuadrados perfectos	1, 4, 9, 16, 25, ...	$a_n=n^2$
Sucesiones Especiales	Cubos perfectos	1, 8, 27, 64, ...	$a_n=n^3$
	Números primos	2, 3, 5, 7, 11, 13, ...	Solo tiene orden
	De Fibonacci	1, 1, 2, 3, 5, 8, ...	$a_1=1$ $a_2=1$ $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$
	De Feinberg (Tribonacci)	1, 1, 2, 4, 7, 13, ...	$a_1=1$ $a_2=1$ $a_3=1$ $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3}$
	De Lucas	1, 3, 4, 7, 11, ...	$a_1=1$ $a_2=3$ $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$

■ **Tabla 2. Fórmulas para series y sucesiones**

PROGRESIONES		
	ARITMÉTICAS	GEOMÉTRICAS
Término General	$a_n=d(n+1)+a_1$	$a_n=a_1 r^{(n-1)}$
Suma de los Primeros Términos	$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$	$S_n=\frac{a_n r - a_1}{r-1}$
Suma de los Infinitos Términos		$S_\infty=\frac{a_1}{1-r}$ si $ r <1$



Revisa y practica al interior de este enlace. Te encontrarás con diversas actividades relacionadas al tema de series y sucesiones



## Límite y convergencia en sucesiones y series

A continuación, se explorarán conceptos cruciales que permiten entender el comportamiento de secuencias de números y la suma de infinitos términos: **el Límite y la Convergencia de Sucesiones y Series**.

Una **sucesión** es una lista ordenada de números, como  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ , donde cada término está indexado por un número natural  $n$ . Una serie es la suma de los términos de una sucesión, es decir:  $S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

El concepto de **Límite** ayuda a predecir qué valor se aproxima a una sucesión cuando el índice  $n$  crece de forma indefinida. Si ese valor existe y es un número finito  $L$ , se dice que la sucesión **converge** a  $L$ . Si no se aproxima a ningún valor finito (o si diverge al infinito), se dice que la sucesión **diverge**.

Para una serie, la **convergencia** se refiere a si la suma de sus términos infinitos se acerca a un valor finito. Esto se determina analizando el límite de la sucesión de sumas parciales ( $S_N = a_1 + a_2 + \dots + a_N$ ) cuando  $N \rightarrow \infty$ . Si  $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = L$  (un número finito), la serie **converge** a  $L$ . De lo contrario, **diverge**.

**Ejemplos.** Aquí tienes tres ejemplos para comprender mejor estos conceptos:

### ■ Ejemplo 1: Sucesión Convergente

Considera la sucesión definida por  $a_n = 1/n$ . Los primeros términos son: 1, 1/2, 1/3, 1/4, ...

Cuando  $n$  se hace muy grande (tiende a infinito),  $1/n$  se hace muy pequeño, acercándose a **cero**.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Por lo tanto, la sucesión converge a 0.

### ■ Ejemplo 2: Sucesión Divergente

Considera la sucesión definida por  $b_n = 2n - 1$ . Los primeros términos son: 1, 3, 5, 7, ... (los números impares).

Cuando  $n$  tiende a infinito, el valor de  $2n - 1$  también tiende a **infinito** ( $\infty$ ).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n - 1) = \infty$$

Por lo tanto, la sucesión **diverge**.



## Práctica de aprendizaje



4 Elaborar

A continuación, tienes diez ejercicios para que practiques los conceptos aprendidos.

### Parte A: Límite de sucesiones (Ejercicios 1 - 5)

Determina el límite de las siguientes sucesiones cuando  $n \rightarrow \infty$ . Indica si la sucesión converge o diverge y, en caso de converger, a qué valor lo hace. Sucesiones geométricas (PG) y Fibonacci

1.  $a_n = \frac{4n^2 - 3n}{2n^2 + 5}$

2.  $(-1)^2 \cdot \frac{n}{(n+1)}$

3.  $\sqrt{(n^2 + n)} - n$

4.  $5 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$

5.  $e_n = \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$

### Parte B: Convergencia de series (Ejercicios 6 - 10)

Determina si las siguientes series convergen o divergen. Nota: No necesitas calcular la suma, solo establecer la convergencia

6.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n}{2n+1}\right)^n$

7.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n \cdot 2^n}$

8.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

9.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 + 3n + 2}$

PLANEA Editorial

Prohibida su reproducción

## Patrones y estructuras fractales

Ahora se abordará un tema que desafía la intuición: las estructuras fractales. Estas formas, presentes tanto en la naturaleza como en las matemáticas puras, muestran la complejidad que puede surgir a partir de la repetición de reglas muy simples.

### ¿Qué es un fractal?

Un fractal es un objeto geométrico cuya estructura básica se repite a diferentes escalas. Esta propiedad se conoce como autosimilitud o autosemejanza.

Imagina que tomas una pequeña parte de un fractal y la amplías: verás una copia (quizá un poco modificada) de todo el objeto original. Este patrón continúa al acercarse más y más, revelando detalles infinitos.

El término "fractal" fue acuñado por el matemático Benoît Mandelbrot en 1975, derivándolo del latín fractus, que significa "roto" o "fragmentado".

### I. Autosimilitud y patrones de repetición

La característica definitoria de los fractales es la autosimilitud. Existen dos tipos principales:

Autosimilitud Exacta	Autosimilitud estadística (o aproximada):
La parte ampliada es idéntica al todo. Esto es común en fractales matemáticos construidos por iteraciones.	La parte ampliada tiene las mismas propiedades estadísticas o cualitativas que el todo. Esto es lo que se observa en la naturaleza.
	



Revisa y practica al interior de este enlace.



## ■ El Proceso de Iteración

Muchos fractales se generan mediante un proceso de iteración, que es la repetición de un conjunto de reglas (un algoritmo) sobre un objeto inicial.

**Ejemplo clásico:** *El copo de nieve de Koch*

- 1. Iteración 0 (Semilla):** Comienza con un segmento de línea.
- 2. Regla de sustitución:** Reemplaza el segmento central del segmento con dos lados de un triángulo equilátero, creando una protuberancia en el centro.
- 3. Iteración n:** Aplica esta regla a cada uno de los nuevos segmentos de la figura anterior, repitiendo el proceso de manera infinita, como así ya se construyó.

A medida que el número de iteraciones aumenta, la longitud del perímetro del copo de nieve tiende al infinito, ¡pero su área permanece finita!

## II. La dimensión fractal

La geometría euclidiana clásica usa dimensiones enteras: 1D (líneas), 2D (planos), 3D (cuerpos). Los fractales, sin embargo, tienen una dimensión fractal (o de Hausdorff), que a menudo es un número no entero (una fracción). La dimensión fractal es una medida de la complejidad o del "grado de llenado" del espacio por parte del objeto. Por ejemplo, un conjunto de Cantor es más que un punto (0D), pero menos que una línea (1D), por lo que su dimensión fractal es  $D < 1$ . El Copo de Koch tiene una dimensión fractal de 1.26 (más que una línea, pero menos que un plano).

$$D = \frac{\log(\text{Número de copias autosemejantes})}{\log(\text{Factor de escala de la ampliación})}$$

*Prohibida su*



Los fractales son mucho más que imágenes bonitas. Son la manifestación visual de la recurrencia y el caos determinista, demostrando que la complejidad infinita puede nacer de la simple repetición de reglas, redefiniendo lo que se entiende por dimensión y estructura.

## Construcción de la curva de Koch



La naturaleza es un gran escaparate de estructuras fractales aproximadas. Estas formas son una solución eficiente para maximizar una superficie o un volumen dentro de un espacio limitado.

Estructura natural	Patrón fractal implícito
Árboles y Bronquios	Ramificación eficiente para distribuir fluidos o energía (savia, aire).
Coliflor y Brócoli	Pequeños cogollos que se asemejan al todo.
Líneas Costeras	El patrón de la orilla se repite sin importar si lo miras en un mapa o de cerca.
Rayos	Ramificación que busca la trayectoria de menor resistencia.
Sistemas Montañosos	Similitud de estructura en las crestas y valles a diferentes escalas.



## Práctica de aprendizaje



*Elaborar algunos dibujos de los fractales encontrados en la naturaleza y realizar una presentación con diapositivas o un video, donde se exponga por equipos frente al resto del grupo.*

Proyecta tu futuro



PLANEA  
Editorial



*Prohibida su  
reproducción*



# Estudio independiente

Responde las siguientes preguntas.

1. ¿Qué es una sucesión y qué es una serie?

---

---

---

---

---

---

---

---

2. ¿Qué ejemplos de sucesiones y series puedes identificar?

---

---

---

---

---

---

---

---

3. ¿Qué es el límite de una sucesión y qué significa que una sucesión sea convergente?

---

---

---

---

---

---

---

---

4. ¿Qué estructuras en tu entorno muestran patrones, comportamientos repetitivos o fractales?

---

---

---

---

---

---

---

---



# Estudio independiente

5. ¿Qué herramientas tecnológicas pueden ayudarte a estudiar sucesiones, series y patrones?

Handwritten lines for answer 5.

6. ¿Qué aprendiste sobre ti al reflexionar sobre sucesiones, series y patrones en tu entorno?

Handwritten lines for answer 6.



Crterios	Nivel Avanzado (3 pts.)	Nivel Intermedio (2 pts.)	Nivel Básico (1 pt.)
<b>Reconozco qué son sucesiones y series</b>	Analizo su estructura formal y su aplicación en modelos matemáticos.	Explico cómo se forman y se relacionan.	Digo que son listas y sumas de números.
<b>Identifico ejemplos y comprendo el concepto de límite y convergencia</b>	Reconozco cuándo una sucesión converge y cómo se interpreta su límite.	Explico que se acercan a un valor.	Digo que los números se repiten.
<b>Relaciono estos conceptos con patrones y estructuras del entorno</b>	Reflexiono sobre cómo los patrones, fractales y ciclos se modelan con sucesiones y series.	Explico que hay patrones en la naturaleza.	Digo que hay formas que se repiten.

### Revisa tu desempeño:

9 puntos - Excelente.

De 6 a 8 puntos - Bien.

De 4 a 5 puntos - Suficiente.

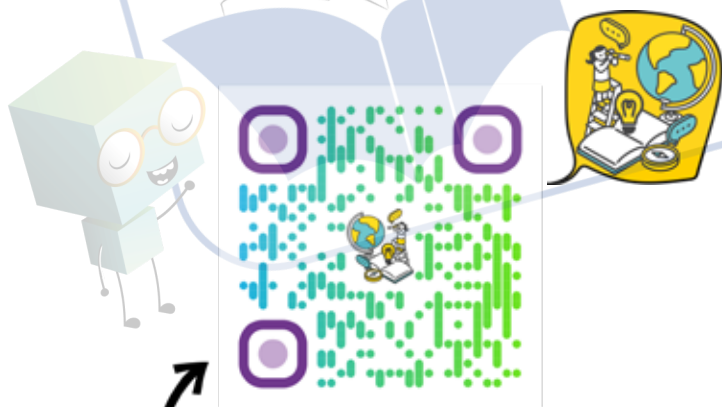
3 puntos - Insuficiente.

# Práctica transversal

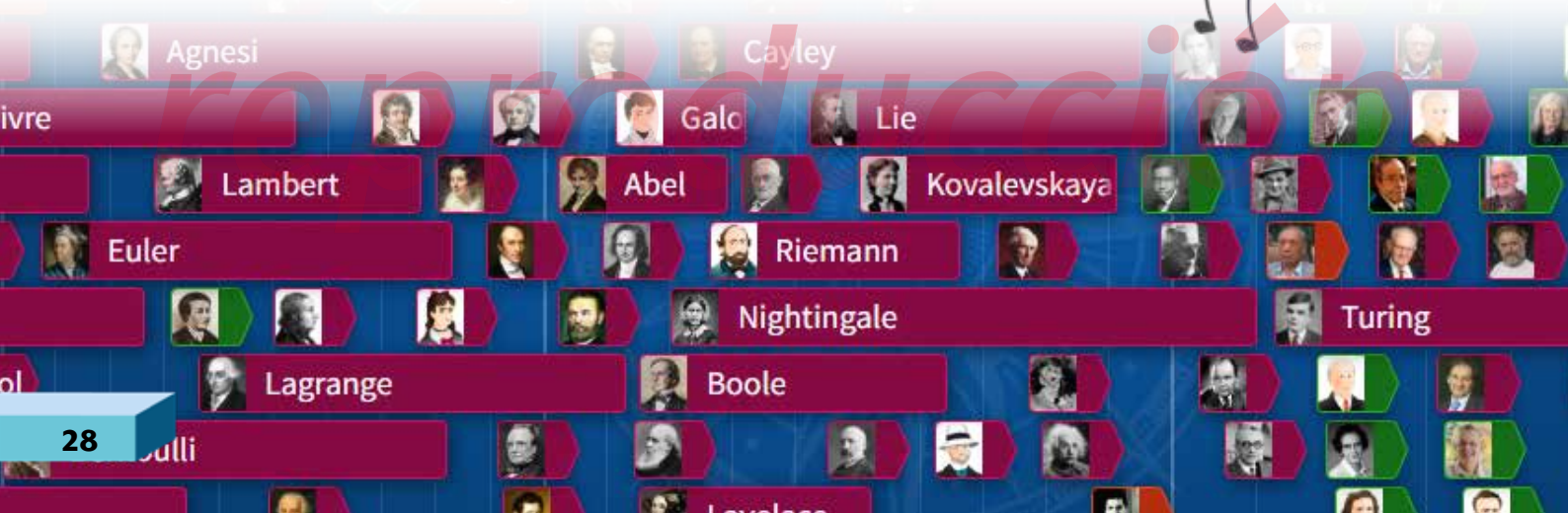


- Del siguiente enlace **Cronología de las matemáticas | Mathigon**, escoge un personaje que te llame la atención y representa mediante una dramatización, sketch, video, etcétera, sus aportaciones en matemáticas y en otras áreas de las materias que llevas en este semestre.

*Puedes trabajar en pareja si los personajes coinciden o generan un debate entre sus puntos de vista de una situación en particular.*



*Paec*



# Temas selectos de matemáticas 2

La Editorial Planea tiene como misión crear materiales didácticos de calidad, con los contenidos adecuados para impactar positivamente en la formación de los estudiantes, desarrollando sus conocimientos, habilidades y actitudes, que los transformen en jóvenes capaces de comprender su entorno e influir en él, aprender de manera autónoma a largo de su vida, ser consciente de sus destrezas para resolver problemas y aceptar retos que lo ayuden a alcanzar su metas, ser sensibles al arte y sus expresiones, asimismo activar la participación ciudadana que reafirme su conciencia cívica y ética, fomentando una actitud respetuosa a la interculturalidad, diversidad de creencias, valores e ideas, asumiendo un pensamiento crítico que ayude al desarrollo sustentable de su comunidad.

El libro de **Temas Selectos de Matemáticas 2**, está desarrollado bajo los Principios de la Nueva Escuela Mexicana, teniendo como eje rector el Nuevo Modelo Educativo de la Educación Media Superior y el programa de estudio por progresiones para la **Dirección General de Bachillerato (DGB)**, el cual propone los siguientes aprendizajes trayectoria del Recurso Sociocognitivo de **Pensamiento Matemático**:

- Valora la aplicación de procedimientos automáticos y algorítmicos, así como la interpretación de sus resultados para anticipar, encontrar y validar soluciones a problemas matemáticos, de áreas del conocimiento y de su vida personal.
- Adopta procesos de razonamiento matemático tanto intuitivos como formales tales como observar, intuir, conjeturar y argumentar, para relacionar información y obtener conclusiones de problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades y de la vida cotidiana).
- Modela y propone soluciones a problemas tanto teóricos como de su entorno, empleando lenguaje y técnicas matemáticas.
- Explica el planteamiento de posibles soluciones a problemas y la descripción de situaciones en el contexto que les dio origen empleando lenguaje matemático y lo comunica a sus pares para analizar su pertinencia.

En la Editorial Planea tenemos un compromiso por desarrollar materiales que cumplan con las expectativas de las comunidades educativas.

## Titulos relacionados



771-159-1900  
[www.editorialplanea.com.mx](http://www.editorialplanea.com.mx)