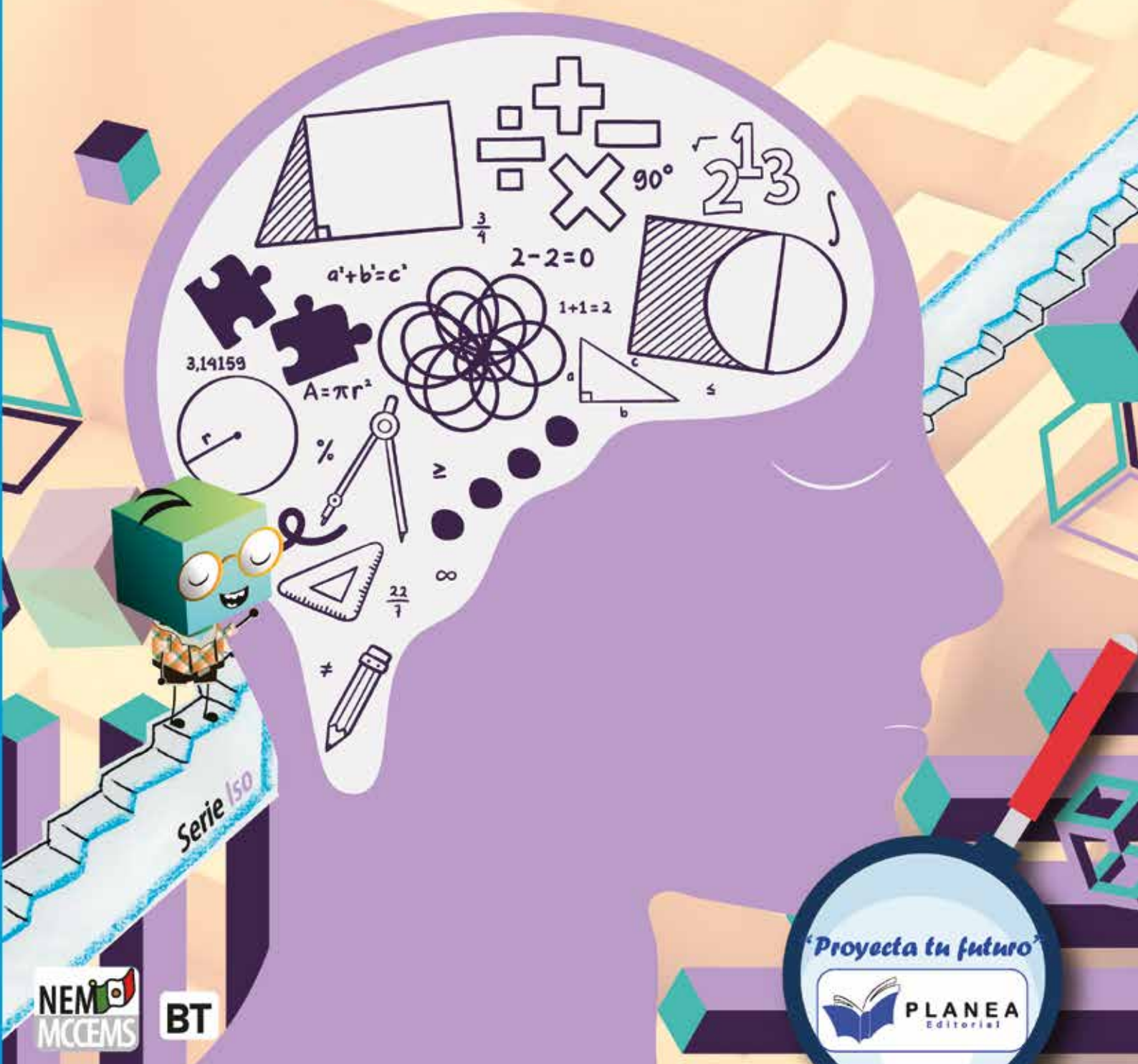


Temas selectos de matemáticas 3

René Pérez Moreno

BT





Temas selectos de matemáticas 3

Primera edición 2026

Copyright © Editorial Planea

ISBN: En trámite **Clave: 20265**

Impreso en México

Contacto: 771-655-6186

Correo electrónico:

informes@editorialplanea.com.mx

Se reservan todos los derechos. Está prohibida la reproducción, almacenamiento en sistemas de recuperación o transmisión de estas publicaciones, ya sea de forma electrónica, mecánica, mediante fotocopia, grabación u otros medios, sin el consentimiento previo del editor. Esto incluye su distribución en redes, almacenamiento electrónico o transmisión para fines de aprendizaje a distancia.

Editor en jefe: Cosme Lorenzo Rodríguez

Autor: René Pérez Moreno

Correctora: Angélica María Alvarado Carreón

Diseño: Nasbbi Irazú Portes Loeza

Imágenes: Adobe Stock

Aviso de exención de responsabilidad:

Los enlaces incluidos en este libro no son propiedad de Editorial Planea, por lo que no se tiene control sobre la información proporcionada por los sitios web en un momento determinado, ni se puede garantizar la exactitud de la información proporcionada por terceros (enlaces externos). Aunque la información se recopila con cuidado y se actualiza de manera constante, no se asume responsabilidad alguna por su exactitud, integridad o actualidad.

Los artículos atribuidos a los autores reflejan sus opiniones y, a menos que se indique de forma específica, no representan las opiniones del editor. Además, la reproducción de este libro o cualquier material de los sitios web incluidos en él no está autorizada, ya que dicho material puede estar sujeto a derechos de propiedad intelectual.

Los derechos pertenecen a sus respectivos propietarios, y Editorial Planea no se hace responsable de la información mostrada en los enlaces proporcionados.



Presentación

En la Editorial Planea estamos comprometidos por ofrecer materiales didácticos de alta calidad, apegados al Nuevo Modelo Educativo de la Educación Media Superior, basado en la premisa de desarrollar en tu joven estudiante un aprendizaje situado en tu entorno, que te ayude en tu día a día, adaptándote a los cambios y brindarte un constante aprendizaje inclusivo, pluricultural, colaborativo y equitativo, basado en los principios de la Nueva Escuela Mexicana.

Este libro se encuentra apegado al 100 % al programa de estudio basado en progresiones de aprendizaje del NME de la EMS, abordando las categorías y subcategorías para lograr los aprendizajes meta que propone el programa de estudio para el Bachillerato Tecnológico para Temas Selectos de Matemáticas III.

Estas progresiones, se encuentran organizadas en tres unidades de aprendizaje, la primera aborda los “Límites y funciones de fenómenos naturales y sociales”, donde se analiza el comportamiento de las sucesiones de números reales, las propiedades y teoremas de los límites y el modelado de fenómenos naturales y sociales; la segunda unidad denominada “Fundamentos de cálculo a fenómenos naturales y sociales” se deduce la tasa de variación, comportamiento de las funciones y el cálculo de áreas de superficies de las funciones de este tipo de fenómenos; en la tercera unidad de aprendizaje “Modelos aplicados a los fenómenos naturales y sociales”, se aborda el teorema fundamental del cálculo, la aplicación de la integral y el modelado de ecuaciones diferenciales.

Este libro, diseñado para ti, trata ayudarte a comprender los conceptos, propiedades y relaciones del pensamiento variacional para la modelación de fenómenos naturales y sociales aplicando los conceptos del cálculo diferencial e integral.



La Nueva Escuela Mexicana NEM

La Nueva Escuela Mexicana (NEM) parte de un diagnóstico donde la educación se entendía como tres ciclos sin conexión, la educación básica (preescolar, primaria y secundaria), la educación media superior y la educación superior, con base en este diagnóstico se construye una propuesta donde la educación debe ser entendida para toda la vida, bajo el concepto de aprender a aprender, la actualización continua, adaptación a los cambios y el aprendizaje permanente.

La NEM propone un plan de 23 años en los diferentes niveles educativos, los cuales estén interconectados entre sí, donde se potencialice la formación integral de las niñas, niños, adolescentes y jóvenes con el objetivo de promover el aprendizaje de excelencia, inclusivo, pluricultural, colaborativo y equitativo a lo largo de su formación.

Para alcanzar el bienestar y la prosperidad incluyente, la NEM se fundamenta en los siguientes principios:



Fomento de la identidad con México. El amor a la patria, el aprecio por su cultura, el conocimiento de su historia y el compromiso de los valores plasmados en la Constitución Política, son las acciones que forman este principio.

Responsabilidad ciudadana. El principio implica la aceptación de derechos y deberes personales y comunes, el respeto por los valores cívicos por parte de los estudiantes formados en la NEM es esencial para transmitir los valores de honestidad, respeto, justicia, solidaridad, reciprocidad, lealtad, libertad, equidad y gratitud.



Honestidad. Se destaca este valor dentro de la responsabilidad social de los estudiantes, el cual permite formar una sociedad con base en la confianza y el sustento de la verdad de todas las acciones para permitir una sana relación entre los ciudadanos.

Respeto de la dignidad humana. Promover el respeto irrestricto a la dignidad y los derechos humanos de las personas, con base en la convicción de la igualdad de todos los individuos en derechos, trato y oportunidades.





Respeto por la naturaleza y cuidado del medio ambiente. La conciencia ambiental favorece la protección y conservación del medio ambiente, la prevención de la contaminación y cambio climático comienza con la educación del desarrollo sostenible.

Promoción de la interculturalidad.

El aprecio y la comprensión por la diversidad cultural y lingüística, así como, el diálogo y el intercambio cultural es una fuerza motriz para tener una vida intelectual, afectiva, moral y espiritual.



Participación en la transformación de la sociedad.

La superación de cada persona por iniciativa propia es la base de este principio, el sentido social de la educación permite construir relaciones cercanas, solidarias y fraternas que superan las indiferencias y la apatía por transformar la sociedad.



Promoción de la cultura de la paz. El objetivo de la agenda 2030 que promueve "Paz, justicia e instituciones sólidas", tiene como fundamento promover sociedades pacíficas, inclusivas, que faciliten el desarrollo sostenible, el acceso a la justicia para todos y la construcción a todos los niveles de instituciones eficaces e inclusivas que rindan cuentas.





Conoce tu libro

Dentro del libro se encuentra desarrollado el Nuevo Modelo Educativo de la Educación Media Superior, el cual se basa en un programa de estudio por progresiones de aprendizaje, las cuales se desarrollan en tres momentos que son:



Apertura. En este primer momento se busca despertar el interés y la motivación del estudiante por el tema que se va a abordar.



Cierre. En este último momento se busca consolidar los aprendizajes y hacer una evaluación del proceso.



Desarrollo. Se presenta el contenido y se realiza una explicación clara y detallada de los conceptos clave.



También se encuentran las secciones:

Evaluación diagnóstica. Se encuentra al inicio de cada unidad de aprendizaje, ayuda a identificar las fortalezas y debilidades con los temas que se van a abordar.

Aprendizaje situado en contextos:



Escuela



Aula



Comunidad



Prácticas transversales.

Donde se enlazan los aprendizajes de los recursos socio-cognitivos con las disciplinas de las áreas de conocimiento.

Prácticas socioemocionales.

El currículum ampliado se vincula con los recursos sociocognitivos, áreas de conocimiento por medio de los diferentes ámbitos de los recursos socioemocionales que están presentes en este tipo de actividades.





Prácticas de aprendizaje. La mejor manera de aplicar los conocimientos y habilidades aprendidas es a través de este tipo de prácticas, las cuales están numeradas, ubicadas en un contexto de aprendizaje y potencializando un principio de la NEM, como se muestra en el siguiente ejemplo:



Práctica de aprendizaje



Lectura NEM. Es una actividad de comprensión lectora que aborda uno de los principios de la Nueva Escuela Mexicana.



Evaluación de la unidad de aprendizaje. Son reactivos que abordan los temas de cada unidad de aprendizaje.

Categorías, subcategorías y metas de aprendizaje. Cada progresión tiene al inicio las categorías, subcategorías y metas de aprendizaje que aborda su contenido como se muestra a continuación:

Categorías de aprendizaje

Subcategoría de aprendizaje

C1 S1 S2
M1 M2

Metas de aprendizaje



Proyecto Aula - Escuela - Comunidad (PAEC). En estos códigos QR podrás realizar las actividades de las progresiones que son parte del PAEC.

Maestro Iso. Cada vez que veas al maestro Iso, él te explicará la progresión de manera dinámica, escaneando el código QR.



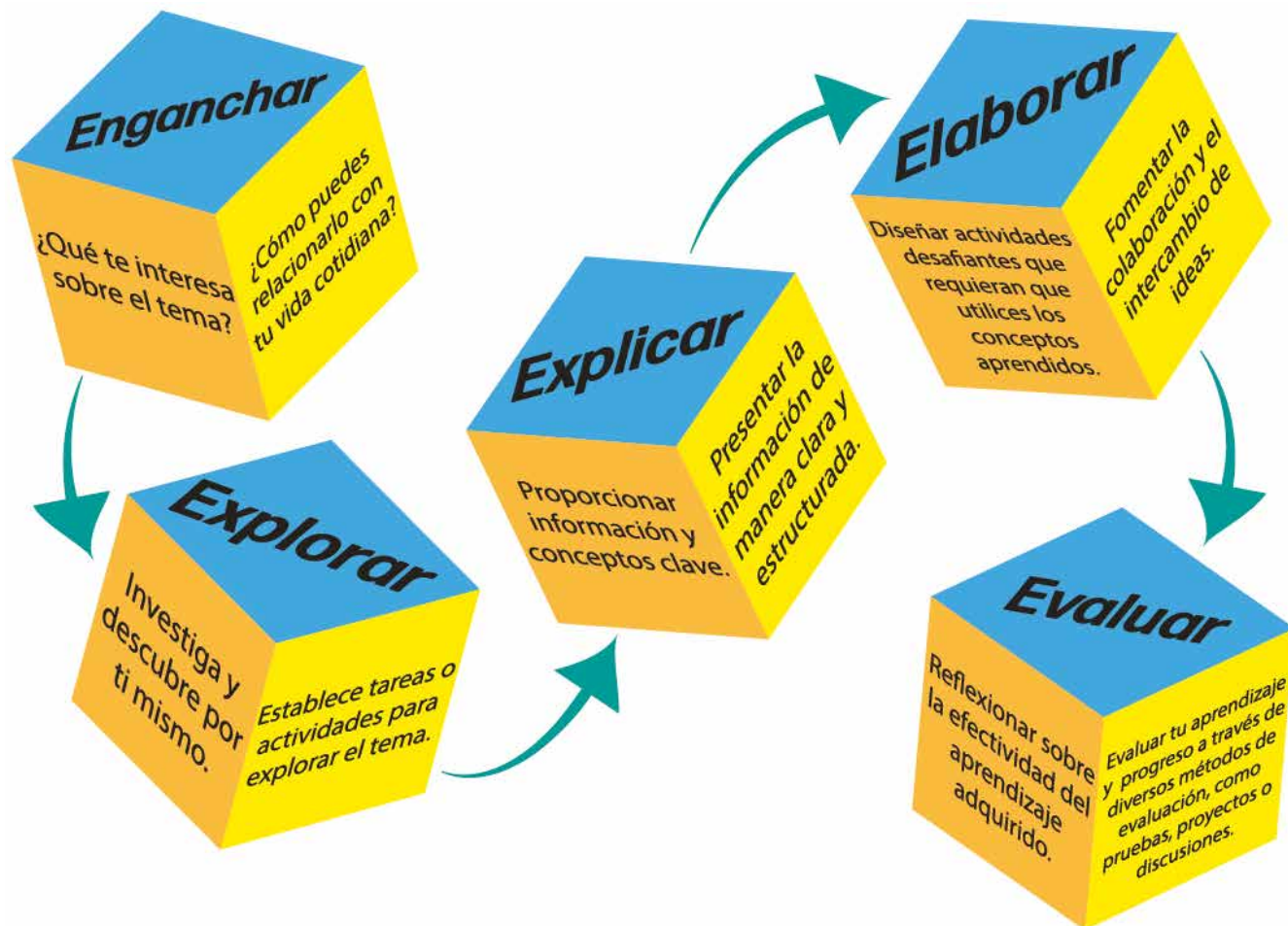
Progresiones de aprendizaje

1. Explora las propiedades y criterios específicos que ayudan a determinar el comportamiento de una sucesión de números reales (convergente, divergente, oscilante), considerando ejemplos concretos.
2. Asume propiedades y aplica teoremas sobre límites para comprender el comportamiento local de fenómenos que son modelados a través de funciones reales de variable real.
3. Modela diversos fenómenos naturales o sociales empleando diferentes tipos de funciones reales de variable real, considerando la continuidad de la función o sus posibles discontinuidades.
4. Cuantifica e interpreta las tasas de variación de fenómenos sociales o naturales empleando la noción de derivada.
5. Calcula e interpreta puntos máximos y mínimos locales, puntos de concavidad y convexidad y demás elementos que permiten entender el comportamiento de una función que modela un fenómeno de interés social o natural asumiendo y aplicando teoremas del cálculo diferencial.
6. Estudia el problema del cálculo de áreas de superficies determinadas por funciones simples y aplica propiedades básicas de la integral definida para poder encontrar dichas áreas, como por ejemplo, que la integral de la suma de dos funciones integrables es la suma de las integrales o que la integral de una función por una constante es la constante por la integral de la función, etc.
7. Analiza el teorema fundamental del cálculo para comprender que la derivación y la integración son procesos inversos.
8. Revisa alguna aplicación de la integral como pueden ser el cálculo de volúmenes de revolución, el concepto de trabajo en las ciencias naturales o la longitud de arco, asumiendo teoremas que les permitan hacer los cálculos necesarios.
9. Modela situaciones utilizando ecuaciones diferenciales de la forma $df/dx = ax$, resolviéndolas de forma directa con el cálculo de integrales y considera que para modelar otras clases de fenómenos se requiere en ocasiones de la aplicación de métodos numéricos y/o de la asistencia de una computadora (verificando que las hipótesis de los teoremas con los que construyeron los programas utilizados se satisfacen), y que, incluso, otros fenómenos a modelar pueden tener un comportamiento caótico debido a la sensibilidad a las condiciones iniciales.

Estrategias para trabajo colaborativo

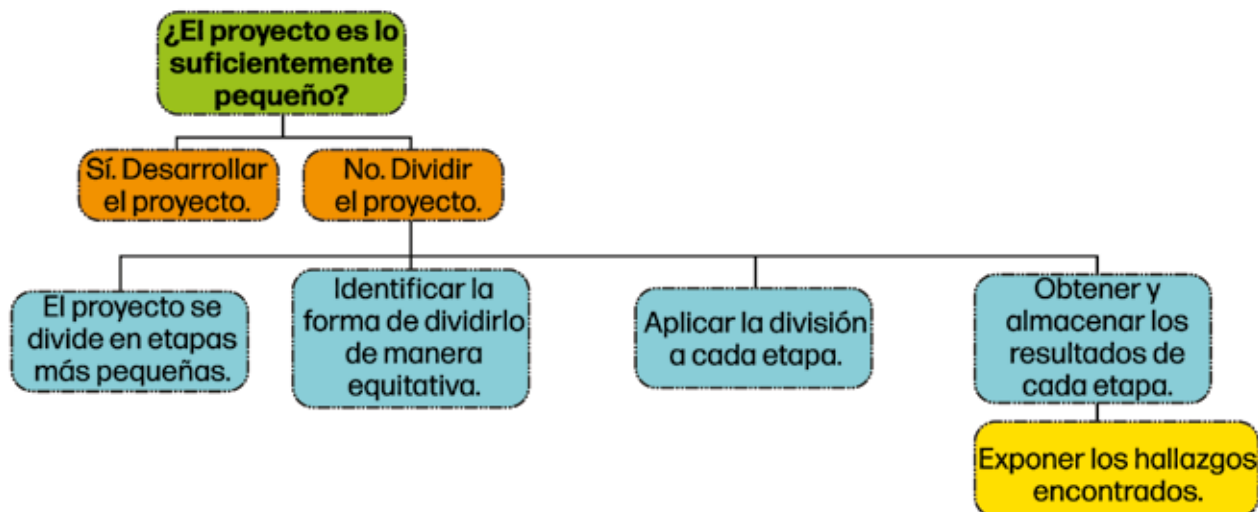
Estrategia 5E

Es una estrategia utilizada en educación para el trabajo colaborativo y diseño de proyectos, consiste en:



Divide y vencerás

Consiste en no ver un proyecto como una unidad, sino como una serie de etapas que pueden desarrollarse de manera individual para después integrar y exponer los hallazgos encontrados, a continuación se muestran los pasos a seguir.



Contenido

Unidad de aprendizaje 1. Límites y funciones de fenómenos naturales o sociales

- Comportamiento de una sucesión de números reales.....
- Propiedades y teoremas de límites.....
- Modelado de fenómenos naturales o sociales.....

Unidad de aprendizaje 2. Fundamentos de cálculo a fenómenos naturales o sociales

- Tasa de variación de fenómenos naturales o sociales.....
- Comportamiento de funciones de fenómenos naturales o sociales.....
- Cálculo de áreas de superficies en funciones.....

Unidad de aprendizaje 3. Modelos aplicados a los fenómenos naturales o sociales

- Teorema fundamental del cálculo.....
- Aplicación de la integral.....
- Modelado de ecuaciones diferenciales.....

Prohibida su

reproducción



Unidad de aprendizaje 1

Límites y funciones de fenómenos naturales o sociales

Categorías de aprendizaje:

- **C2.** Procesos de intuición y razonamiento.

Subcategorías:

- **S1.** Capacidad para observar y conjeturar.
- **S2.** Pensamiento intuitivo.

- **C3.** Solución de problemas y modelación.

Subcategorías:

- **S2.** Construcción de modelos.

- **C4.** Interacción y lenguaje matemático

Subcategorías:

- **S1.** Registro escrito, simbólico, algebraico e iconográfico.
- **S2.** Negociación de significados.
- **S3.** Ambiente matemático de comunicación.

Meta de aprendizaje:

- **C2M1.** Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.
- **C2M4.** Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.
- **C3M2.** Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno.

- **C4M1.** Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.
- **C4M3.** Organiza los procedimientos empleados en la solución de un problema a través de argumentos formales para someterlo a debate o evaluación.

Aprendizaje de trayectoria:

- Aplica procedimientos algorítmicos e interpreta sus resultados para anticipar, encontrar y validar soluciones a problemas matemáticos, de áreas del conocimiento y de su vida personal.
- Observa, intuye, conjetura y argumenta a favor o en contra de afirmaciones matemáticas tanto teóricas como de aplicación en áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos o recursos socioemocionales, para debatir y contrastar ideas con sus pares.
- Analiza situaciones y problemas, discerniendo las variables de interés para el estudio, así como también llevando a cabo la verificación requerida de las hipótesis para la aplicación de los objetos, métodos y conceptos matemáticos utilizados, con la finalidad de modelar fenómenos o resolver problemas.
- Describe, interpreta y comunica con claridad ideas, situaciones y fenómenos propios de la matemática, de las ciencias naturales, experimentales, de la tecnología, de las ciencias sociales y de su entorno, empleando un lenguaje matemático riguroso.

Progresiones:

1. Explora las propiedades y criterios específicos que ayudan a determinar el comportamiento de una sucesión de números reales (convergente, divergente, oscilante), considerando ejemplos concretos.
2. Asume propiedades y aplica teoremas sobre límites para comprender el comportamiento local de fenómenos que son modelados a través de funciones reales de variable real.
3. Modela diversos fenómenos naturales o sociales empleando diferentes tipos de funciones reales de variable real, considerando la continuidad de la función o sus posibles discontinuidades.

reproducción

Presentación

La unidad de aprendizaje 1 del libro de Temas Selectos de Matemáticas 3 para Bachillerato Tecnológico, denominada “Límites y funciones de fenómenos naturales o sociales” introduce al análisis matemático a través del estudio de los límites, las sucesiones y el modelado de fenómenos reales. Estos conceptos constituyen la base para comprender cómo cambian, evolucionan o tienden ciertos procesos presentes tanto en la naturaleza como en la vida social. Más que operar mecánicamente, esta unidad invita a observar patrones, formular conjeturas y reconocer que las matemáticas permiten describir comportamientos que, a simple vista, pueden parecer caóticos o impredecibles. Los temas específicos se visualizan en el siguiente esquema.

**Unidad de aprendizaje 1.
Límites y funciones de
fenómenos naturales o sociales**

**Progresión 1.
Comportamiento de
una sucesión de
números reales**

**Progresión 2.
Propiedades y
teoremas de límites**

**Progresión 3.
Modelado de
fenómenos
naturales o sociales**



Evaluación diagnóstica

Resuelve los siguientes planteamientos y subraya la respuesta correcta en cada uno de los casos.

- ¿Cuál de las siguientes expresiones describe correctamente una sucesión?
 - Un número real que cambia aleatoriamente
 - Una lista ordenada de números reales definida por una regla
 - Una ecuación con dos incógnitas
 - Un conjunto sin orden específico
- Si una sucesión $a_n = \frac{1}{n}$, ¿qué ocurre con sus términos conforme n aumenta?
 - Crece sin límite
 - Oscilan entre valores positivos y negativos
 - Se acercan a 0
 - Permanecen constantes
- ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera respecto al límite de una suma de funciones?
 - El límite de una suma es la suma de los límites (si existen)
 - El límite de una suma siempre es infinito
 - El límite de una suma depende del valor inicial de la función
 - El límite de una suma no puede calcularse directamente
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x)$
 - $L + M$
 - $L - M$
 - $L \cdot M$
 - No puede determinarse
- ¿Cuál de los siguientes ejemplos representa mejor un modelo matemático?
 - Describir verbalmente que una población crece rápido
 - Dibujar un paisaje natural
 - Observar que los precios suben sin registrar datos
 - Representar el crecimiento poblacional mediante la función $P(t) = P_0 e^{kt}$

Comportamiento de una sucesión de números reales

S1 S2 S3
M1 M2 M3 M4

Unidad 1

Enganchar

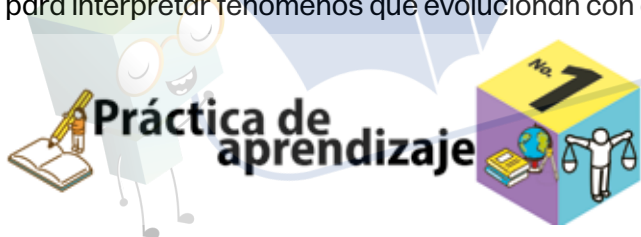
1

Apertura

Comprender cómo se comporta una sucesión de números reales es una puerta de entrada al pensamiento matemático avanzado. Las sucesiones permiten observar cómo evoluciona un proceso paso a paso, identificar patrones y anticipar tendencias. En esta progresión explorarás criterios y propiedades fundamentales que permiten clasificar una sucesión como convergente, divergente u oscilante, a partir de ejemplos concretos que conectan con situaciones reales.

Una sucesión convergente es aquella cuyos términos se acercan cada vez más a un valor fijo; por ejemplo, la sucesión $a_n = \frac{1}{n}$ se aproxima a 0 conforme n crece. En contraste, una sucesión divergente se aleja sin límite o no se aproxima a ningún valor específico, como $b_n = n$, cuyos términos crecen indefinidamente. También existen sucesiones oscilantes, que alternan entre valores sin estabilizarse, como $c_n = (-1)^n$, que cambia entre 1 y -1.

A lo largo de esta progresión analizarás estas conductas con mayor profundidad, aprenderás a justificar por qué ocurre cada una y aplicarás criterios formales para determinar el comportamiento de una sucesión. El propósito es que puedas reconocer patrones, argumentar con claridad y utilizar estos conceptos para interpretar fenómenos que evolucionan con el tiempo.



Práctica de aprendizaje

2 Explorar

Considera que una persona decide ahorrar de manera peculiar: cada semana deposita en una alcancía la mitad de lo que depositó la semana anterior. La primera semana guarda 100 pesos, la segunda 50, la tercera 25, la cuarta 12.5, y así sucesivamente.

- El grupo se pregunta: ¿Hacia qué valor tiende la cantidad depositada cada semana? ¿Qué tipo de comportamiento tiene esta sucesión?

Prohibida su reproducción



Representación visual de las sucesiones

Una sucesión es una colección ordenada de números, objetos o figuras que siguen un patrón de comportamiento, el cual puede ser representado mediante una fórmula, una descripción oral o una regla que deben cumplir todos los elementos de la sucesión. Matemáticamente, una sucesión se denota como a_n , donde a_n representa el término en la posición n . Por ejemplo, la sucesión de los números naturales se expresa como $a_n = n$, para $n = 1, 2, 3, \dots$

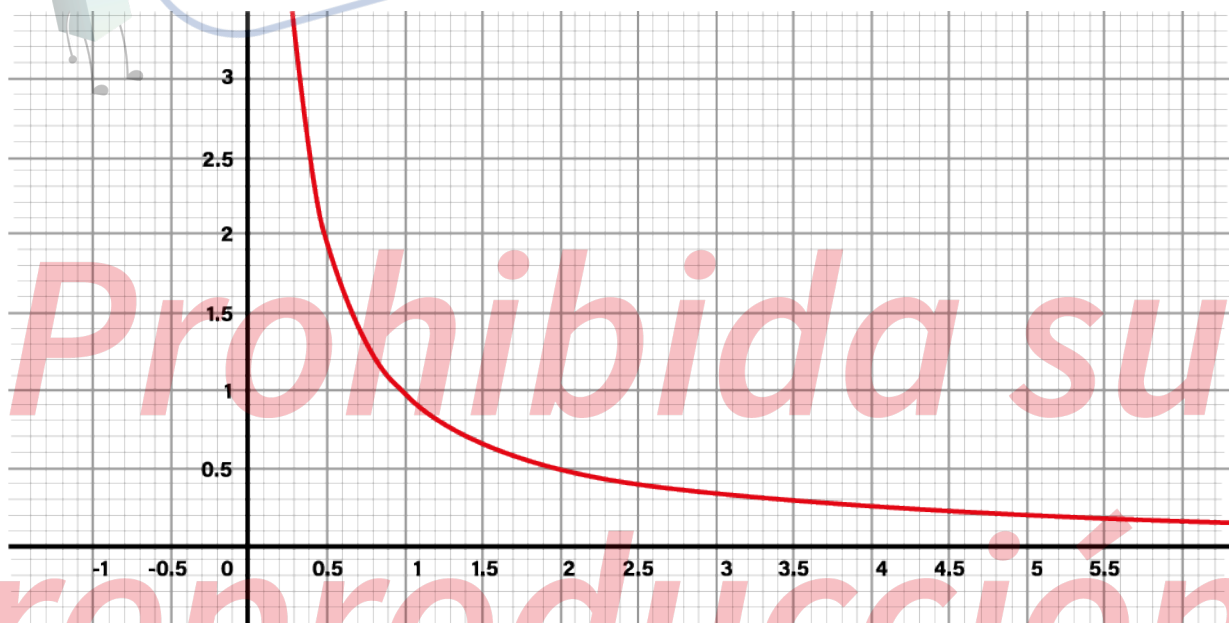
Existen diferentes tipos de sucesiones, entre las más comunes se encuentran:

- **Sucesiones aritméticas:** cada término se obtiene sumando una constante al anterior.
- **Sucesiones geométricas:** cada término se obtiene multiplicando el anterior por una constante.
- **Sucesiones alternadas y oscilantes:** los términos cambian de signo o valor de manera regular o irregular.

La representación visual de las sucesiones es necesario para identificar patrones y comprender su comportamiento.

Representación gráfica en el plano cartesiano

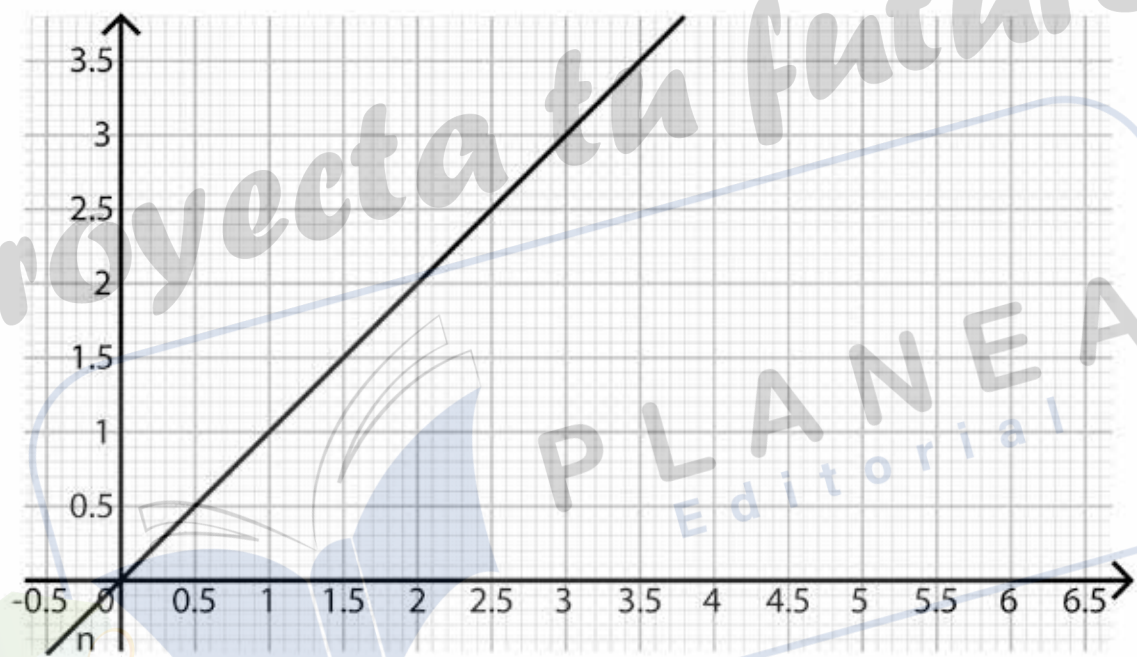
Para visualizar una sucesión numérica, se asigna una gráfica en el plano cartesiano, donde el eje horizontal representa el índice n y el eje vertical el valor del término a_n . Cada término se representa como un punto (n, a_n) .



Gráfica de la sucesión $a_n = \frac{1}{n}$. Los puntos se acercan a 0 conforme n crece.

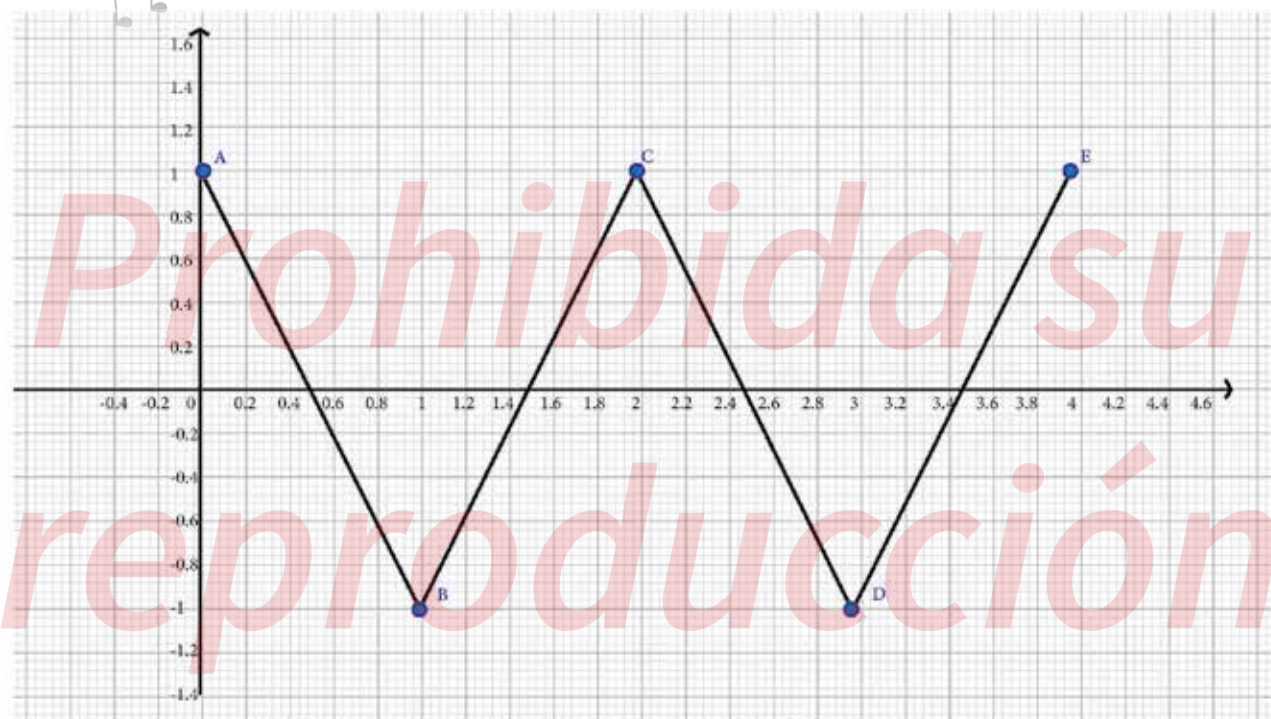
En la gráfica, se observa que los puntos se aproximan cada vez más a la línea $y = 0$, lo que sugiere que la sucesión converge a 0.

La representación gráfica permite distinguir entre sucesiones convergentes, divergentes y oscilantes. Por ejemplo, la sucesión muestra puntos que se alejan indefinidamente.



Gráfica de la sucesión $a_n = n$

Mientras que $a_n = (-1)^n$ alterna entre 1 y -1.



Representación visual de la sucesión $a^n = (-1)^n$

Sucesiones de figuras y generalización visual

Además de sucesiones numéricas, existen sucesiones de figuras, donde cada término es una figura geométrica que sigue un patrón de crecimiento o transformación. Este tipo de sucesiones es especialmente útil para el desarrollo del pensamiento algebraico y la generalización de patrones.



Figura 1

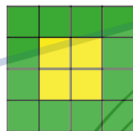


Figura 2

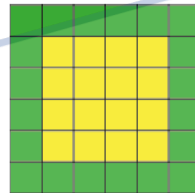


Figura 3

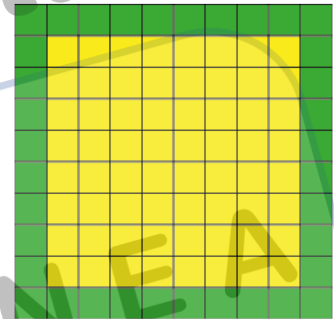


Figura 4

Sucesión de figuras cuadradas. Cada figura agrega un cuadro más que el anterior.

La estrategia visual consiste en analizar cómo cambia la figura de un término a otro, identificar el patrón y expresar la relación mediante una regla verbal o simbólica. Por ejemplo, si la figura n tiene n cuadrados, la regla general es “el número de cuadrados es igual al lugar que ocupa la figura”.

La visualización y manipulación de objetos concretos facilita la comprensión y la generalización de patrones, permitiendo a los estudiantes inducir la validez del patrón a los demás términos de la sucesión.



Práctica de aprendizaje

Observa la siguiente sucesión de figuras, donde cada figura agrega un círculo más que la anterior.



Figura 1



Figura 2

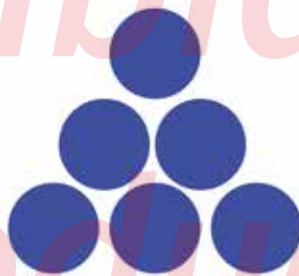


Figura 3

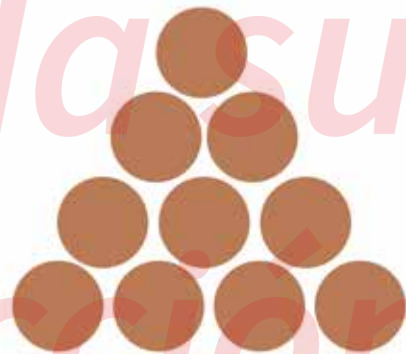
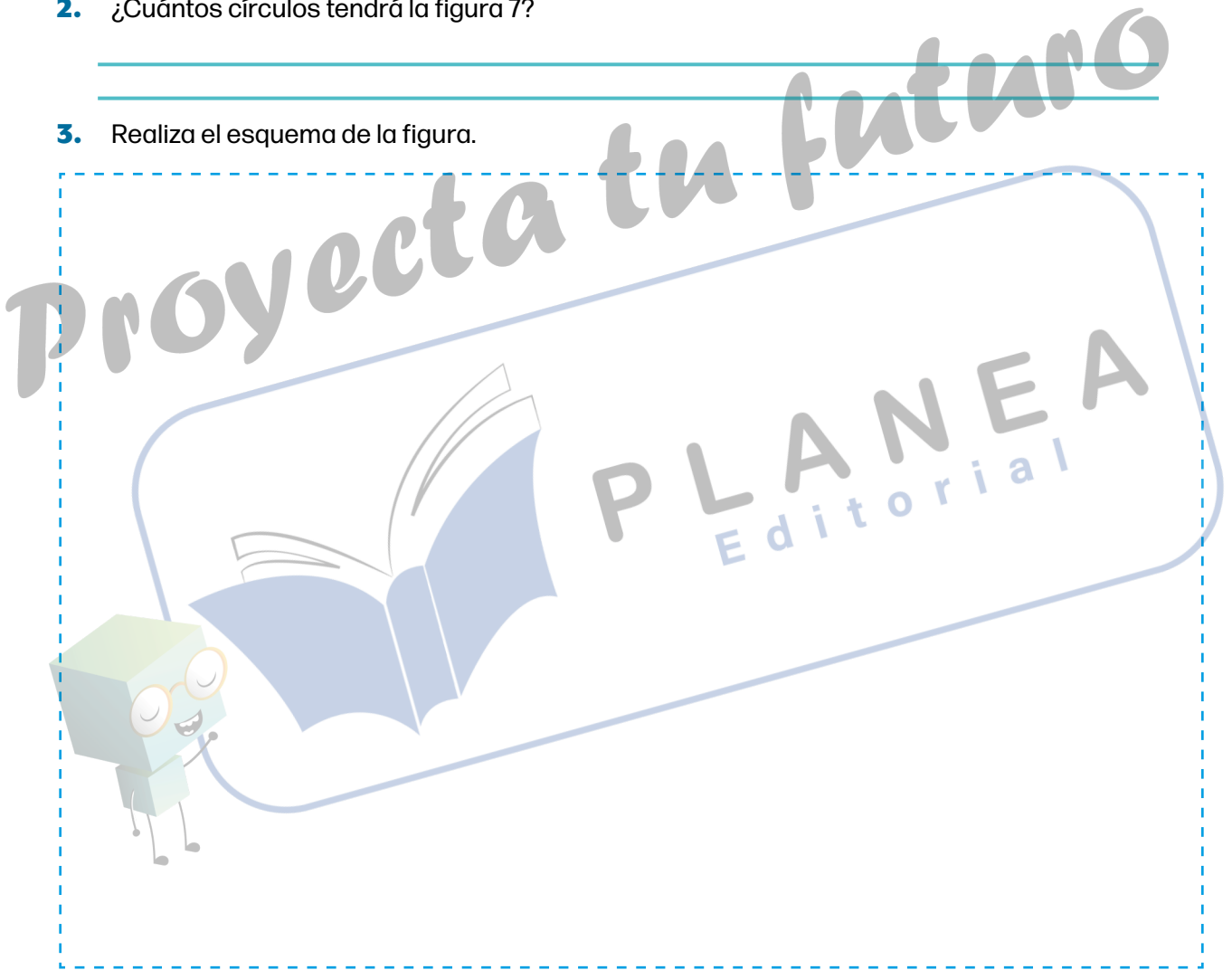


Figura 4

1. ¿Cuál es la regla general para el número de círculos en la figura n ?

2. ¿Cuántos círculos tendrá la figura 7?

3. Realiza el esquema de la figura.



Límites de las sucesiones

El límite de una sucesión es el valor al que tienden los términos de la sucesión cuando el índice n toma valores muy grandes. Intuitivamente, si los términos de la sucesión se acercan cada vez más a un número específico L conforme n crece, se dice que la sucesión converge a L .

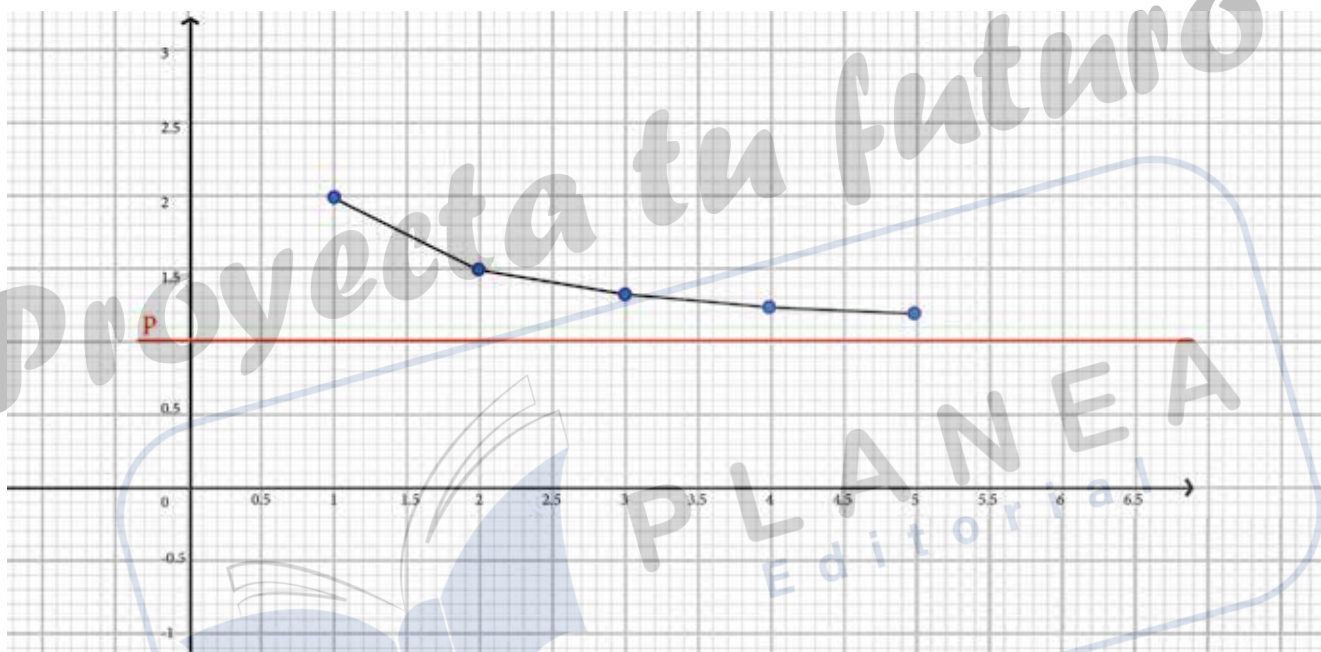
Por ejemplo:

■ La sucesión:

$$a_n = 1 + \frac{1}{n}$$

Al darle valores a n de: 1, 2, 3, 4, ..., los términos son: 2, 1.5, 1.33..., 1.25, ..., y se acercan a 1. Por lo tanto, el límite es 1.

La siguiente gráfica muestra esta tendencia.



La definición formal del límite de una sucesión utiliza el concepto de aproximación arbitraria mediante el parámetro ϵ (épsilon):

Una sucesión a_n tiene límite L si para todo $\epsilon > 0$, existe un número natural N tal que para todo $n > N$, se cumple que $|a_n - L| < \epsilon$.

Esto significa que, a partir de cierto término, todos los términos de la sucesión están tan cerca de L como se desee.

Para la sucesión $a_n = \frac{1}{n}$, dado cualquier $\epsilon > 0$, se puede encontrar un N tal que para todo $n > N$, $|a_n - 0| < \epsilon$, es decir, $\frac{1}{n} < \epsilon$.

Propiedades de los Límites de Sucesiones

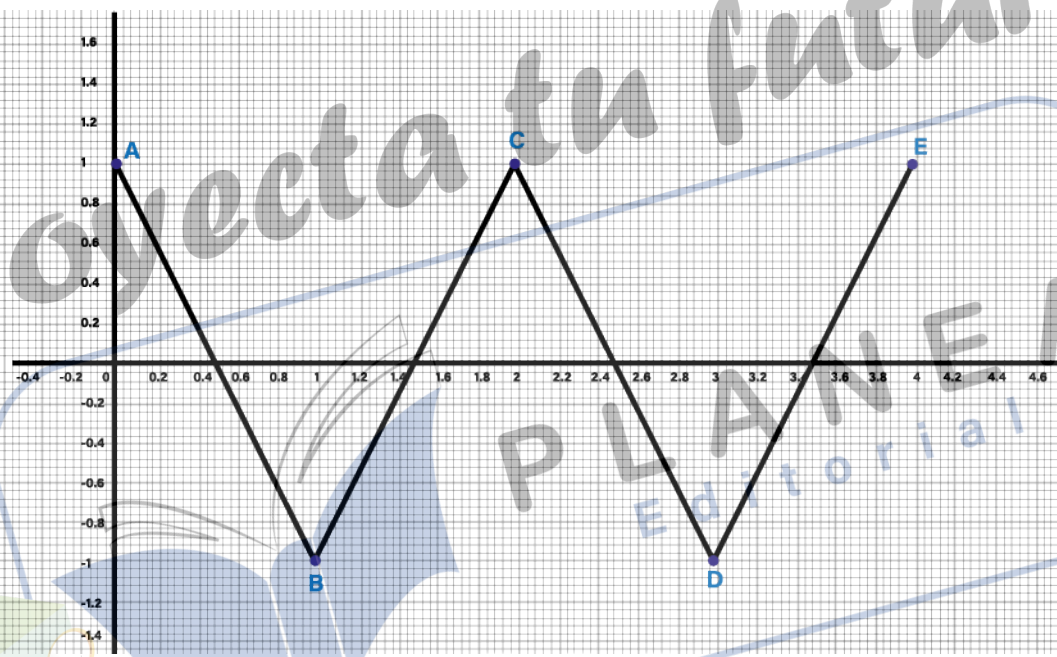
Las sucesiones convergentes tienen varias propiedades importantes:

- El límite de una sucesión es único.
- Si todos los términos de una sucesión son iguales a un mismo valor, el límite es ese valor.
- La suma, resta, multiplicación y división de sucesiones convergentes también son sucesiones convergentes, y el límite se obtiene operando los límites respectivos.
- Si una sucesión converge, entonces está acotada.
- Si una sucesión es monótona y acotada, entonces converge (teorema de convergencia monótona).

Analiza los siguientes ejemplos para analizar dichas propiedades de los límites de una sucesión.

Ejemplo 1.

En la sucesión $a_n = (-1)^n$

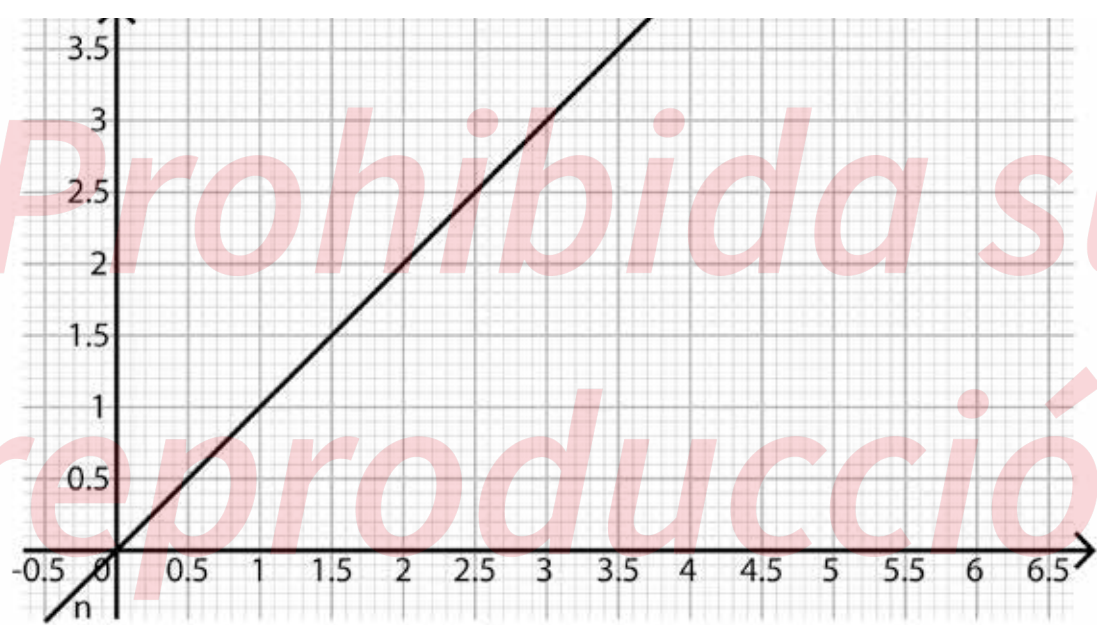


Los términos alternan entre 1 y -1. La gráfica muestra puntos en 1 y -1, sin acercarse a un solo valor.

Ejemplo 2:

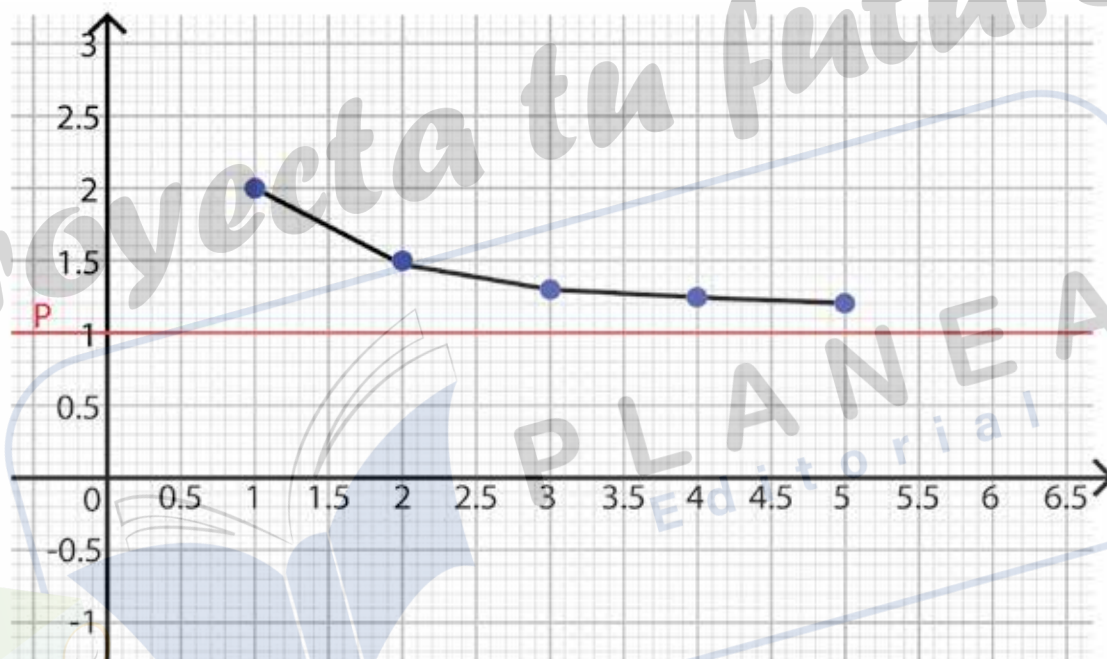
En la sucesión $a_n = n$

Los términos crecen indefinidamente. La gráfica muestra puntos que se alejan hacia el infinito



Ejemplo 3:

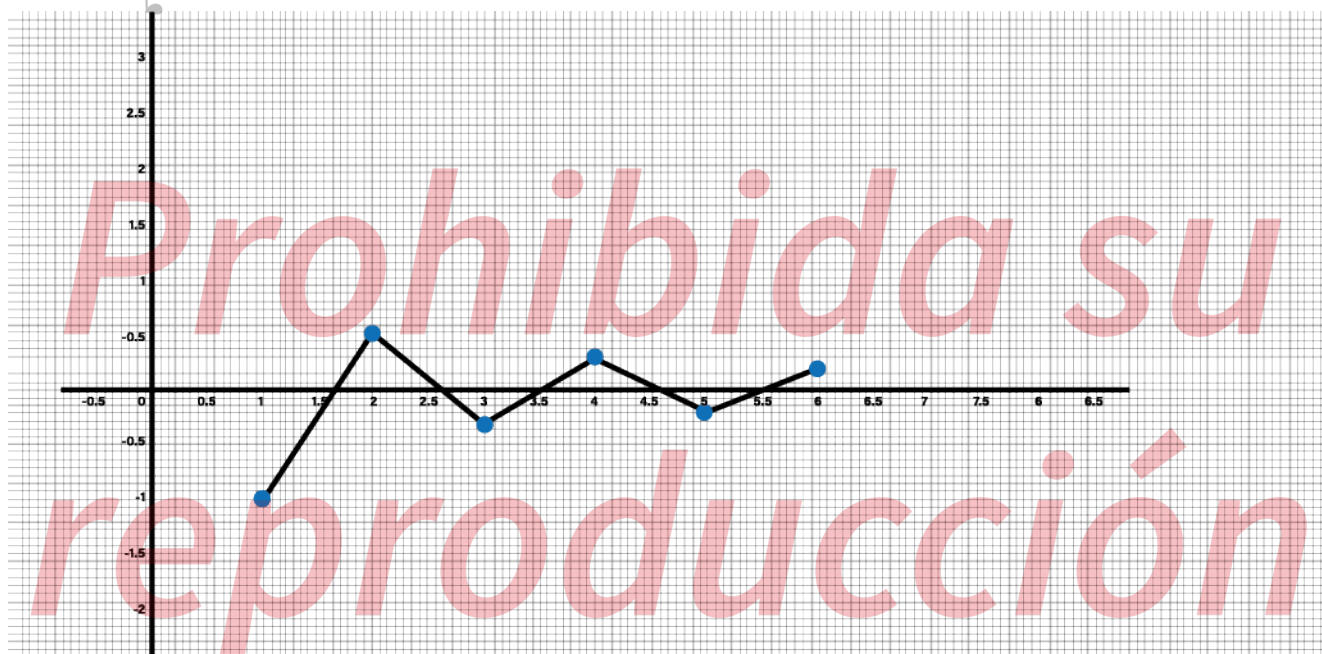
La sucesión $a_n = 1 + \frac{1}{n}$



Los puntos se acercan a 1 conforme (n) crece.

Ejemplo 4:

La sucesión $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$



Los términos alternan en signo y se acercan a 0. La gráfica muestra puntos que oscilan pero se aproximan a la línea $y = 0$.



Práctica de aprendizaje



Determina el límite de la sucesión $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

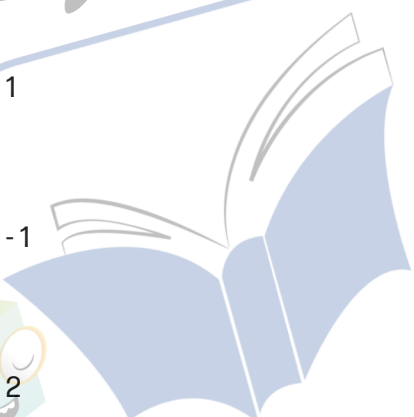
a) $n=0$

b) $n=1$

c) $n=-1$

d) $n=2$

e) $n=-2$



PLANEA
Editorial

Criterios de convergencia

Una sucesión es monótona si sus términos son siempre crecientes o decrecientes. Es acotada si existe un número que limita superior o inferiormente todos sus términos.

Teorema de la Convergencia Monótona

"*Toda sucesión monótona y acotada es convergente. Si la sucesión es creciente y acotada superiormente, converge al supremo; si es decreciente y acotada inferiormente, converge al ínfimo.*"

Ejemplo:

La sucesión $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ es creciente y acotada de manera superior por 1. Por lo tanto, converge a 1.

Criterio del Sándwich (Teorema del Encaje)

El criterio del sándwich, también llamado teorema del emparedado o de intercalación, establece que si una sucesión está acotada inferior y superiormente por dos sucesiones que convergen al mismo límite, entonces la sucesión central también converge a ese límite.



Si existen sucesiones

$$a_n, b_n, c_n$$

tales que

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

para todo n que tiende a hacerse infinito, y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$$

entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$$

Para comprender este criterio analiza el siguiente ejemplo:

- Para demostrar que: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0$
- se observa que: $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$

ambas sucesiones convergen a 0. Por el criterio del sándwich, la sucesión central también converge a 0.

Criterio de Cauchy para Sucesiones

Una sucesión es de Cauchy si para cualquier distancia dada (por pequeña que sea), existe un término a partir del cual la distancia entre dos términos cualesquiera es menor que esa distancia. En los números reales, toda sucesión de Cauchy es convergente.

Una sucesión a_n es de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$, existe un N tal que para todos $m, n > N$, se cumple $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Este criterio es útil porque, en ocasiones, es más fácil verificar que una sucesión es de Cauchy que encontrar su límite.

Criterios Algebraicos: Suma, Producto y Cociente

Las operaciones algebraicas sobre sucesiones convergentes conservan la convergencia:

- Suma:

$$\text{Si } \lim a_n = L_1 \text{ y } \lim b_n = L_2$$

$$\text{Entonces } \lim(a_n + b_n) = L_1 + L_2$$

- Producto:

$$\lim(a_n \cdot b_n) = L_1 \cdot L_2$$

- Cociente:

$$\text{Si } L_2 \neq 0, \lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{L_1}{L_2}.$$

Estas propiedades permiten calcular límites de sucesiones complejas a partir de límites de sucesiones más simples.



Práctica de aprendizaje



Considera la sucesión $a_n = \frac{1}{n}$ y $b_n = 2 + \frac{1}{n}$. Calcula el límite de:

a) La suma $a_n + b_n$.

Respuesta:

Por lo tanto

b) La multiplicación $a_n \cdot b_n$

Respuesta:

Por lo tanto

c) La división $\frac{a_n}{b_n}$

Respuesta:

Por lo tanto

PLANEA
Editorial

Prohibida su
reproducción



Unidad 1

Criterios de divergencia

Sucesiones que tienden a $\pm \infty$

Una sucesión diverge a infinito si sus términos crecen sin límite superior; diverge a menos infinito si decrecen sin límite inferior.

Se dice que a_n diverge a $+\infty$ si para todo $M \in \mathbb{R}$, existe N tal que para todo $n > N$, $a_n > M$. De forma análoga, diverge a $-\infty$ si para todo M , existe N tal que para todo $n > N$, $a_n < M$.

Ejemplo:

La sucesión $a_n = n$ diverge a $+\infty$.

Propiedades:

- Si multiplicamos una sucesión divergente a infinito por una constante positiva, la sucesión resultante también diverge a infinito.
- La suma y el producto de dos sucesiones divergentes a infinito también divergen a infinito.
- Si una sucesión es monótona y no acotada, entonces diverge a infinito.

Sucesiones que no tienen límite finito

No todas las sucesiones que no convergen divergen a infinito. Algunas sucesiones, como $a_n = (-1)^n$, no tienen límite finito ni divergen a infinito; se denominan oscilantes.



Práctica de aprendizaje



Clasifica las siguientes sucesiones en convergentes, divergentes u oscilantes, argumenta tu respuesta.

a) $a_n = n^2$

- _____
- _____

b) $a_n = 3n + 2$

- _____
- _____
- _____

c) $a_n = 4\left(\frac{1}{3}\right)^n$

- _____
- _____
- _____



d) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

■ _____
■ _____
■ _____

e) $a_n = 7$

■ _____
■ _____
■ _____

f) $a_n = -2n$

■ _____
■ _____
■ _____

Proyecta tu futuro

PLANEA Editorial

Sucesiones oscilantes y alternadas

Una sucesión es oscilante cuando sus términos no se acercan a ningún valor específico, sino que alternan entre varios valores o se comportan de manera irregular. Las sucesiones alternadas son un caso particular de las oscilantes, donde cada término tiene el signo contrario al anterior. Observa los siguientes ejemplos de sucesiones.

- 1. Sucesión alternada $a_n = (-1)^n$

Los términos son: 1, -1, 1, -1, ..., alternando entre 1 y -1.

- 2. Sucesión alternada y convergente $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

Los términos alternan en signo, pero su magnitud disminuye y se acercan a 0.

- 3. Sucesión oscilante no alternada $a_n = \sin n$

Sus valores no siguen un patrón regular como. La función seno, al evaluarse en números enteros, produce valores que varían entre -1 y 1, pero de forma aparentemente impredecible.

$\sin(1) \approx 0.84, \sin(2) \approx 0.91, \sin(3) \approx 0.14,$

$\sin(4) \approx -0.76, \sin(5) \approx -0.96, \dots$

Como ves, oscila, pero no alterna de forma regular.

- 4. Sucesión oscilante irregular.

La sucesión 2, -4, 6, 4, 2, -6, 6, -2, -4, 0, -2, 2, ... no sigue un patrón alternado regular.

Las sucesiones oscilantes pueden tener varios **puntos de acumulación**, es decir, valores alrededor de los cuales se concentran infinitos términos de la sucesión. Las sucesiones convergentes tienen un solo punto de acumulación (el límite), las divergentes tienen uno (el infinito), y las oscilantes tienen dos o más.



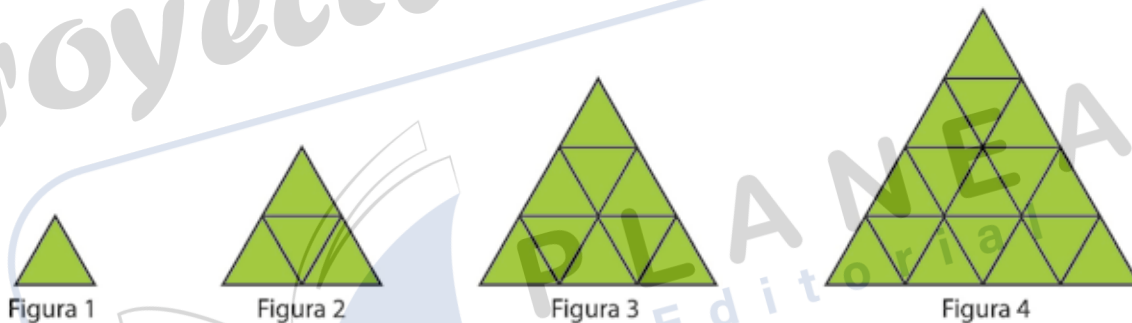
Refuerza tus conocimientos en el tema de sucesiones y patrones con el video del código QR



Representación con figuras y generalización visual

El trabajo con sucesiones de figuras es una estrategia didáctica recomendada en el currículo de bachillerato en México para promover el desarrollo del pensamiento algebraico. Permite identificar patrones, establecer reglas generales y conectar la visualización con la expresión simbólica.

Por ejemplo la sucesión de triángulos, cada figura agrega un triángulo más que la anterior. La regla general es "el número de triángulos es igual al lugar que ocupa la figura".



Las estrategias para generalizar patrones en sucesiones de figuras incluyen:

- **Conteo:** calcular el número de elementos en cada figura.
- **Recursiva-aditiva:** obtener cada término sumando al anterior una cantidad constante.
- **Multiplicar con las diferencias:** expresar el valor de cada término como la multiplicación del término por la diferencia.
- **Contextual:** construir una regla basada en la información del contexto.
- **Explícita:** determinar una función que permita encontrar cualquier término.

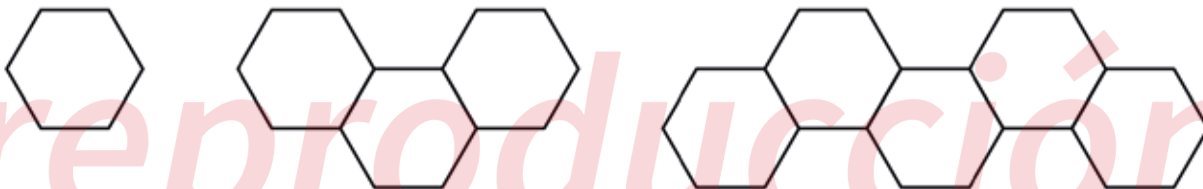
La estrategia visual es especialmente eficaz para inducir y expresar patrones de regularidad, permitiendo a los estudiantes establecer nociones generales de variabilidad y generalizar la relación de crecimiento.



Práctica de aprendizaje

4 Elaborar

Observa la sucesión de figuras donde cada figura agrega dos hexágonos más que la anterior.



- ¿Cuál es la regla general para el número de hexágonos en la figura n ? ¿Cuántos hexágonos tendrá la figura 5?

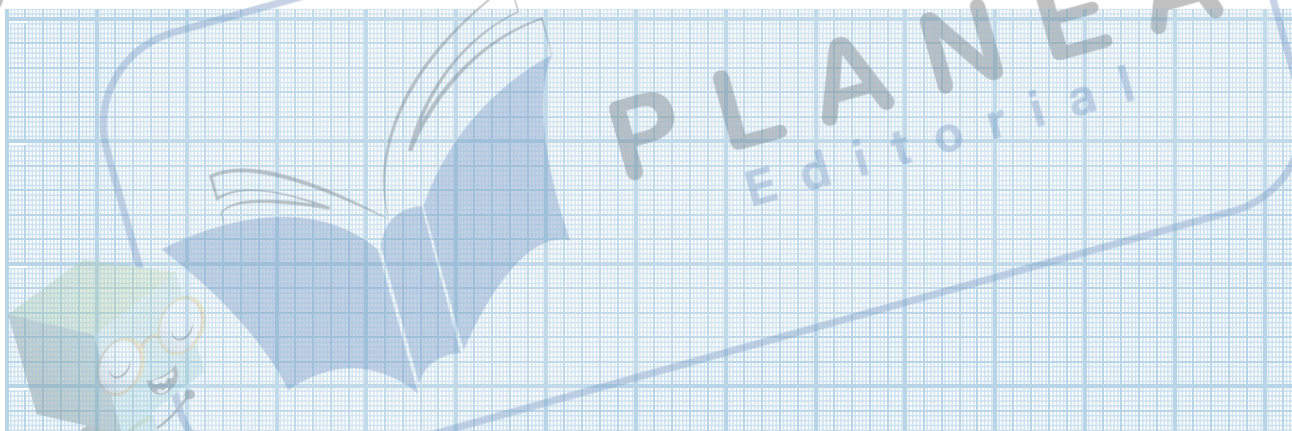


Práctica de aprendizaje



A continuación se presentan planteamientos sobre sucesiones responde cada uno de forma correcta.

1. Dibuja la gráfica de la sucesión para $n = 1, 2, 3, 4, 5$. ¿Qué observas en la gráfica?



2. Calcula el límite de la sucesión $a_n = \frac{1}{n^2}$

3. ¿La sucesión $a_n = \frac{n}{n+1}$ es monótona y acotada? ¿Cuál es su límite?

4. Demuestra que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n}{n} = 0$ usando el criterio del sándwich.

5. ¿La sucesión $a_n = n^3$ es convergente, divergente o oscilante?

6. ¿Qué tipo de sucesión es $a_n = \cos n$?, argumenta tu respuesta.



Estudio independiente

Responde las siguientes preguntas.

1. ¿Cómo describo el comportamiento de la sucesión que estoy analizando?

2. ¿Cómo justifico mi clasificación del comportamiento de la sucesión?

3. ¿Qué criterio utilizo para determinar si la sucesión converge, diverge u oscila?

4. ¿Cómo aplico ese criterio a un ejemplo concreto?

Prohibida su

5. ¿Qué ejemplo concreto puedo usar para ilustrar el comportamiento de la sucesión?

reproducción



Estudio independiente

6. ¿Cómo explico mi conclusión usando ese ejemplo?

Criterios	Nivel Avanzado (3 pts.)	Nivel Intermedio (2 pts.)	Nivel Básico (1 pt.)
Identifico y describo el comportamiento de una sucesión (convergente, divergente u oscilante)	Analizo con claridad el comportamiento de distintas sucesiones, justificando mi clasificación con argumentos matemáticos precisos.	Identifico si una sucesión converge, diverge u oscila en ejemplos sencillos y explico brevemente por qué.	Reconozco algunos tipos de comportamiento, pero me cuesta identificarlo en ejemplos concretos.
Exploro y aplico criterios específicos para determinar el comportamiento de una sucesión	Utilizo criterios formales (límite, acotación, monotonía, alternancia, comparación) para justificar rigurosamente el comportamiento de sucesiones diversas.	Aplico criterios básicos como límites, crecimiento o alternancia para determinar el comportamiento de una sucesión.	Conozco algunos criterios, pero no sé cómo aplicarlos correctamente.
Utilizo ejemplos concretos para explicar y justificar mis conclusiones sobre el comportamiento de una sucesión	Construyo y analizo ejemplos propios que ilustran claramente cada tipo de comportamiento, justificando mis conclusiones con precisión.	Explico mis conclusiones usando ejemplos numéricos o sucesiones conocidas.	Me cuesta relacionar los conceptos con ejemplos concretos.

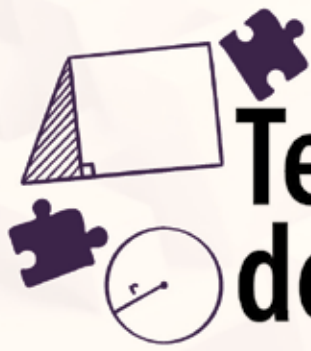
Revisa tu desempeño:

9 puntos - Excelente.

De 6 a 8 puntos - Bien.

De 4 a 5 puntos - Suficiente.

3 puntos - Insuficiente.



Temas selectos de matemáticas 3



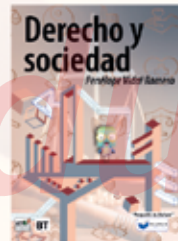
La Editorial Planea tiene como misión crear materiales didácticos de calidad, con los contenidos adecuados para impactar positivamente en la formación de los estudiantes, desarrollando sus conocimientos, habilidades y actitudes, que los transformen en jóvenes capaces de comprender su entorno e influir en él, aprender de manera autónoma a largo de su vida, ser consciente de sus destrezas para resolver problemas y aceptar retos que lo ayuden a alcanzar su metas, ser sensibles al arte y sus expresiones, asimismo activar la participación ciudadana que reafirme su conciencia cívica y ética, fomentando una actitud respetuosa a la interculturalidad, diversidad de creencias, valores e ideas, asumiendo un pensamiento crítico que ayude al desarrollo sustentable de su comunidad.

El libro de **Temas selectos de matemáticas 3**, está desarrollado bajo los Principios de la Nueva Escuela Mexicana, teniendo como eje rector el Nuevo Modelo Educativo de la Educación Media Superior y el programa de estudio por progresiones para el **Bachillerato Tecnológico**, el cual propone los siguientes aprendizajes trayectoria de este **Recurso Sociocognitivo**:

- Aplicar procedimientos algorítmicos e interpretar sus resultados para anticipar, encontrar y validar soluciones a problemas matemáticos, de áreas del conocimiento y de su vida personal.
- Observar, intuir, conjeturar y argumentar a favor o en contra de afirmaciones matemáticas tanto teóricas como de aplicación en áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos o recursos socioemocionales, para debatir y contrastar ideas con sus pares.
- Analizar situaciones y problemas, discerniendo las variables de interés para el estudio, así como la verificación requerida de las hipótesis para la aplicación de los objetos, métodos y conceptos matemáticos utilizados, con la finalidad de modelar fenómenos o resolver problemas.
- Describir, interpretar y comunicar con claridad ideas, situaciones y fenómenos propios de la matemática, de las ciencias naturales, experimentales, de la tecnología, de las ciencias sociales y de su entorno, empleando un lenguaje matemático riguroso.

En la Editorial Planea tenemos un compromiso por desarrollar materiales que cumplan con las expectativas de las comunidades educativas.

Titulos relacionados



771-159-1900
www.editorialplanea.com.mx