

# Taller de pensamiento variacional

René Pérez Moreno

1



“Proyecta tu futuro”





# Taller de pensamiento variacional 1

**Primera Edición 2026**

**Copyright © Editorial Planea**

**ISBN:** *en trámite.*

*Impreso en México*

**Contacto:** 771-655-6186

**Correo electrónico:**

informes@planeaeditorial.com.mx

Se reservan todos los derechos. Está prohibida la reproducción, almacenamiento en sistemas de recuperación o transmisión de estas publicaciones, ya sea de forma electrónica, mecánica, mediante fotocopia, grabación u otros medios, sin el consentimiento previo del editor. Esto incluye su distribución en redes, almacenamiento electrónico o transmisión para fines de aprendizaje a distancia.

**Editor en jefe:** Cosme Lorenzo Rodríguez

**Autor:** René Pérez Moreno

**Correctora:** Angélica María Alvarado Carreón

**Diseño:** Nasbbi Irazú Portes Loeza

**Imágenes:** Adobe Stock

## **Aviso de exención de responsabilidad:**

Los enlaces incluidos en este libro no son propiedad de Editorial Planea, por lo que no se tiene control sobre la información proporcionada por los sitios web en un momento determinado, ni se puede garantizar la exactitud de la información proporcionada por terceros (enlaces externos). Aunque la información se recopila con cuidado y se actualiza de manera constante, no se asume responsabilidad alguna por su exactitud, integridad o actualidad.

Los artículos atribuidos a los autores reflejan sus opiniones y, a menos que se indique de forma específica, no representan las opiniones del editor. Además, la reproducción de este libro o cualquier material de los sitios web incluidos en él no está autorizada, ya que dicho material puede estar sujeto a derechos de propiedad intelectual.

Los derechos pertenecen a sus respectivos propietarios, y Editorial Planea no se hace responsable de la información mostrada en los enlaces proporcionados.

# Presentación

En la Editorial Planea estamos comprometidos con ofrecer materiales didácticos de alta calidad, apegados al Nuevo Modelo Educativo de la Educación Media Superior, basado en la premisa de desarrollar en ti, joven estudiante, un aprendizaje situado en tu entorno, que te ayude en tu día a día, adaptándote a los cambios y brindarte un constante aprendizaje inclusivo, pluricultural, colaborativo y equitativo, basado en los principios de la Nueva Escuela Mexicana.

Este libro se encuentra apegado al 100 % con el programa de estudio basado en progresiones de aprendizaje del NME de la EMS, abordando las categorías y subcategorías para lograr los aprendizajes meta que propone el programa de **Taller de Pensamiento Variacional I**, para la Dirección General de Bachillerato (DGB).

Estas progresiones, se encuentran organizadas en dos unidades de aprendizaje, la primera, titulada la "*Modelación matemática del cambio*", desarrolla las cuatro primeras progresiones de aprendizaje, enfocadas en las técnicas aritméticas, algebraicas y funcionales; el concepto formal del límite; la definición formal de la derivada y las reglas de derivación del producto, cociente y cadena. La segunda unidad, denominada "*Análisis y modelación del cambio*", comprende las progresiones cinco a ocho del programa de estudios, en las que se abordan los teoremas fundamentales del cálculo, la derivación avanzada, la modelación matemática con derivadas y la diferencial como herramienta para modelar.

Este libro está diseñado para ti. Su propósito es que observes, analices, modelos, resuelvas e intérpretes problemas reales de tu comunidad, utilizando la derivada como razón de cambio a partir de su comprensión como un límite, así como el uso de los teoremas propios del cálculo diferencial.



# La Nueva Escuela Mexicana NEM

La Nueva Escuela Mexicana (NEM) parte de un diagnóstico donde la educación se entendía como tres ciclos sin conexión, la educación básica (preescolar, primaria y secundaria), la educación media superior y la educación superior, con base en este diagnóstico se construye una propuesta donde la educación debe ser entendida para toda la vida, bajo el concepto de aprender a aprender, la actualización continua, adaptación a los cambios y el aprendizaje permanente.

La NEM propone un plan de 23 años en los diferentes niveles educativos, los cuales estén interconectados entre sí, donde se potencialice la formación integral de las niñas, niños, adolescentes y jóvenes con el objetivo de promover el aprendizaje de excelencia, inclusivo, pluricultural, colaborativo y equitativo a lo largo de su formación.

Para alcanzar el bienestar y la prosperidad incluyente, la NEM se fundamenta en los siguientes principios:



**Fomento de la identidad con México.** El amor a la patria, el aprecio por su cultura, el conocimiento de su historia y el compromiso de los valores plasmados en la Constitución Política, son las acciones que forman este principio.

**Responsabilidad ciudadana.** El principio implica la aceptación de derechos y deberes personales y comunes, el respeto por los valores cívicos por parte de los estudiantes formados en la NEM es esencial para transmitir los valores de honestidad, respeto, justicia, solidaridad, reciprocidad, lealtad, libertad, equidad y gratitud.



**Honestidad.** Se destaca este valor dentro de la responsabilidad social de los estudiantes, el cual permite formar una sociedad con base en la confianza y el sustento de la verdad de todas las acciones para permitir una sana relación entre los ciudadanos.

**Respeto de la dignidad humana.** Promover el respeto irrestricto a la dignidad y los derechos humanos de las personas, con base en la convicción de la igualdad de todos los individuos en derechos, trato y oportunidades.





**Respeto por la naturaleza y cuidado del medio ambiente.** La conciencia ambiental favorece la protección y conservación del medio ambiente, la prevención de la contaminación y cambio climático comienza con la educación del desarrollo sostenible.

**Promoción de la interculturalidad.**

El aprecio y la comprensión por la diversidad cultural y lingüística, así como, el diálogo y el intercambio cultural es una fuerza motriz para tener una vida intelectual, afectiva, moral y espiritual.



**Participación en la transformación de la sociedad.**

La superación de cada persona por iniciativa propia es la base de este principio, el sentido social de la educación permite construir relaciones cercanas, solidarias y fraternas que superan las indiferencias y la apatía por transformar la sociedad.



**Promoción de la cultura de la paz.** El objetivo de la agenda 2030 que promueve “Paz, justicia e instituciones sólidas”, tiene como fundamento promover sociedades pacíficas, inclusivas, que faciliten el desarrollo sostenible, el acceso a la justicia para todos y la construcción a todos los niveles de instituciones eficaces e inclusivas que rindan cuentas.





# Conoce tu libro

Dentro del libro se encuentra desarrollado el Nuevo Modelo Educativo de la Educación Media Superior, el cual se basa en un programa de estudio por progresiones de aprendizaje, las cuales se desarrollan en tres momentos que son:



**Apertura.** En este primer momento se busca despertar el interés y la motivación del estudiante por el tema que se va a abordar.



**Cierre.** En este último momento se busca consolidar los aprendizajes y hacer una evaluación del proceso.



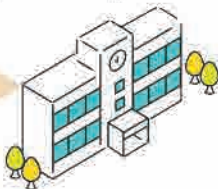
**Desarrollo.** Se presenta el contenido y se realiza una explicación clara y detallada de los conceptos clave.



También se encuentran las secciones:

**Evaluación diagnóstica.** Se encuentra al inicio de cada unidad de aprendizaje, ayuda a identificar las fortalezas y debilidades con los temas que se van a abordar.

**Aprendizaje situado en contextos:**



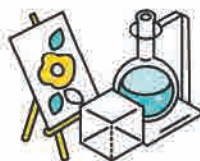
Escuela



Aula



Comunidad



**Prácticas transversales.**

Donde se enlazan los aprendizajes de los recursos socio-cognitivos con las disciplinas de las áreas de conocimiento.

**Prácticas socioemocionales.**

El currículum ampliado se vincula con los recursos sociocognitivos, áreas de conocimiento por medio de los diferentes ámbitos de los recursos socioemocionales que están presentes en este tipo de actividades.





**Prácticas de aprendizaje.** La mejor manera de aplicar los conocimientos y habilidades aprendidas es a través de este tipo de prácticas, las cuales están numeradas, ubicadas en un contexto de aprendizaje y potencializando un principio de la NEM, como se muestra en el siguiente ejemplo:



## Práctica de aprendizaje



**Lectura NEM.** Es una actividad de comprensión lectora que aborda uno de los principios de la Nueva Escuela Mexicana.



**Evaluación de la unidad de aprendizaje.** Son reactivos que abordan los temas de cada unidad de aprendizaje.

**Categorías, subcategorías y metas de aprendizaje.** Cada progresión tiene al inicio las categorías, subcategorías y metas de aprendizaje que aborda su contenido como se muestra a continuación:

Categorías de aprendizaje

Subcategoría de aprendizaje

C1 S1 S2  
M1 M2

Metas de aprendizaje



**Proyecto Aula - Escuela - Comunidad (PAEC).** En estos códigos QR podrás realizar las actividades de las progresiones que son parte del PAEC.

**Maestro Iso.** Cada vez que veas al maestro Iso, él te explicará la progresión de manera dinámica, escaneando el código QR.



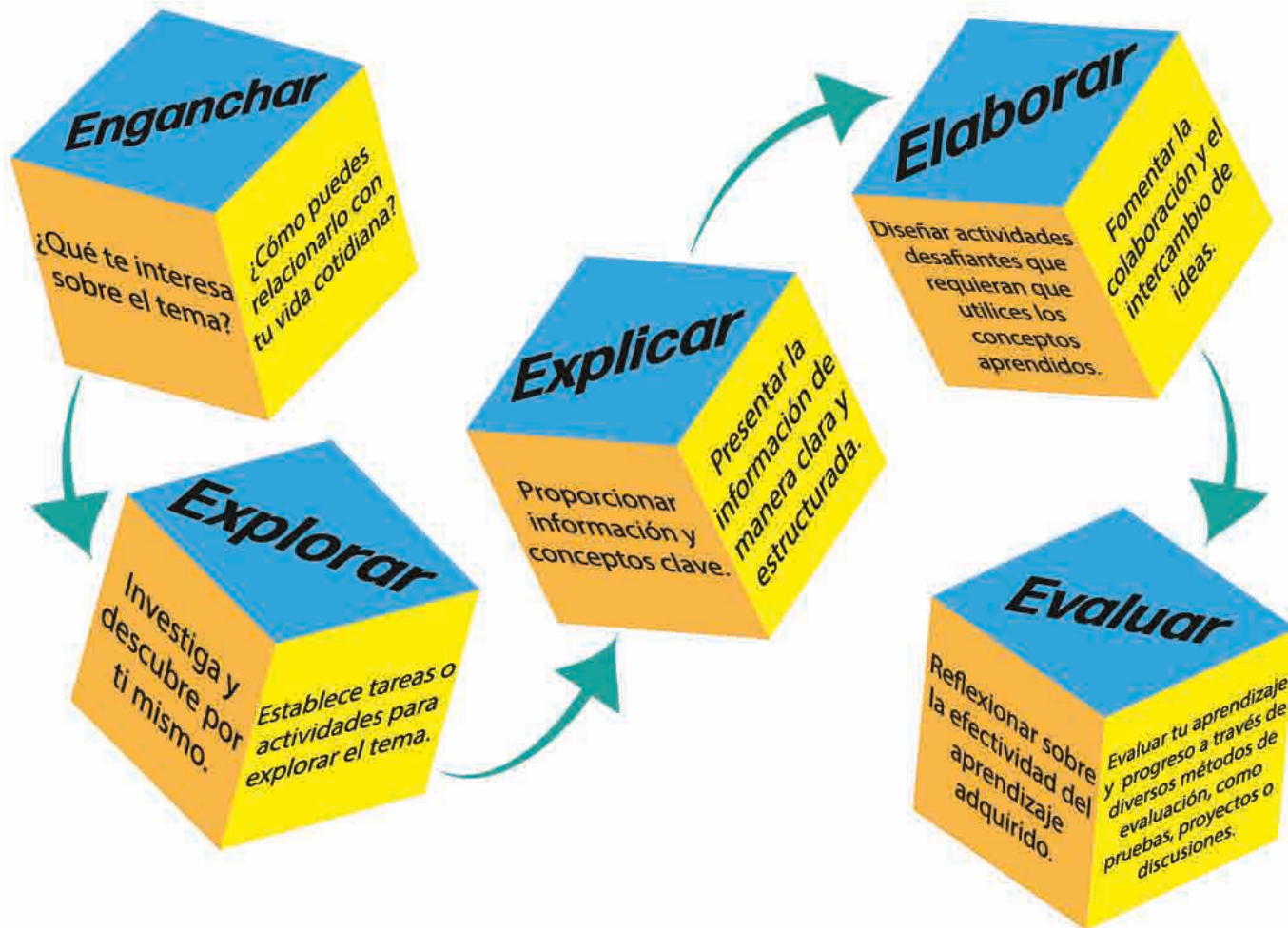
# Progresiones de aprendizaje

1. Aplica técnicas aritméticas, algebraicas y operaciones funcionales a través del planteamiento de problemáticas de las ciencias, para realizar procesos según lo requiera y adecuar la expresión matemática de manera que el estudiantado analice, compruebe e interprete sus hallazgos y resultados.
2. Analiza de manera formal el concepto de límite, profundizando en el cálculo de límites de funciones mediante sus teoremas para dar solución a problemáticas contextualizadas de las ciencias utilizando métodos analíticos y/o recursos tecnológicos.
3. Analiza la definición formal de derivada a partir del planteamiento de una situación-problema significativa para el estudiantado que evidencie la variación de una recta secante a la recta tangente, con la cual se puedan obtener las reglas de derivación para calcular derivadas de funciones, empleando en caso de ser necesario recursos tecnológicos.
4. Emplea la regla del producto, la regla del cociente y la regla de la cadena en situaciones-problema provenientes de recursos sociocognitivos y/o áreas del conocimiento, en donde la función que describe el fenómeno de estudio requiere el uso de una de estas reglas.
5. Analiza el Teorema de valor medio y Teorema de Rolle así como su utilidad en el planteamiento y solución a problemas de la vida cotidiana o del entorno que le rodea de manera que el estudiantado analice, compruebe e interprete sus hallazgos y resultados.
6. Aplica procedimientos algorítmicos para derivar funciones implícitas y de orden superior, así como el uso de estas últimas para resolver límites indeterminados utilizando la regla de L'Hôpital aplicando estas herramientas en la solución de problemas de las ciencias.
7. Aplica y/o construye modelos para encontrar la solución de situaciones-problema de su contexto, usando la derivada como una herramienta que le permite interpretar y explicar fenómenos de variación estudiados por las ciencias considerando herramientas analíticas y/o tecnológicas en la modelación.
8. Construye modelos matemáticos, identificando las variables que se relacionan entre sí, obteniendo de manera intuitiva la diferencial como una herramienta para darle solución a problemas de las ciencias que le permita obtener información y analizar los resultados para la toma de decisiones.

# Estrategias para trabajo colaborativo

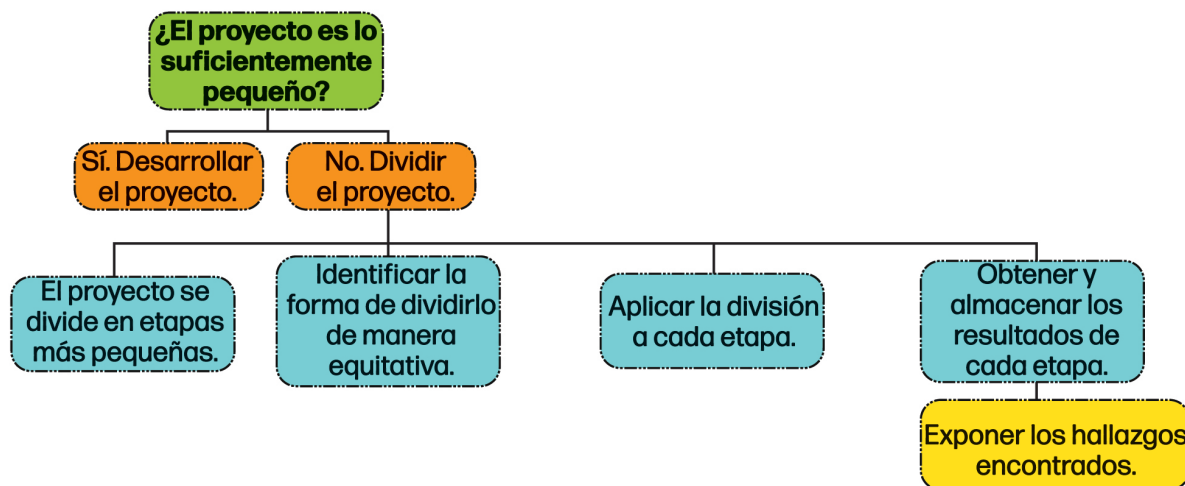
## Estrategia 5E

Es una estrategia utilizada en educación para el trabajo colaborativo y diseño de proyectos, consiste en:



## Divide y vencerás

Consiste en no ver un proyecto como una unidad, sino como una serie de etapas que pueden desarrollarse de manera individual para después integrar y exponer los hallazgos encontrados, a continuación se muestran los pasos a seguir.



# Contenido

## Unidad de aprendizaje 1. Modelación matemática del cambio.

Técnicas aritméticas, algebraicas y funcionales.

Expresión algebraica de relaciones entre variables.

Operaciones funcionales.

Análisis e interpretación de resultados.

Concepto formal del límite.

Límite y su significado científico.

Cálculo de límites.

Resolución de problemas.

Definición formal de derivada.

Variación y razón de cambio.

Derivada por aproximaciones sucesivas.

Reglas básicas de derivación.

Reglas del producto, cociente y cadena.

Regla del producto.

Regla del cociente.

Regla de la cadena.

## Unidad de aprendizaje 2. Análisis y modelación del cambio.

Teoremas fundamentales del cálculo.

Teorema de Rolle.

Teorema del valor medio.

Aplicación de los teoremas.

Derivación avanzada.

Derivación implícita.

Derivadas de orden superior.

Regla de L'Hôpital.

Modelación matemática con derivadas.

Fenómenos de variación.

Construcción de modelos matemáticos

Herramientas analíticas y tecnológicas.

La diferencial como herramienta para modelar.

Variables y relaciones en un fenómeno científico.

La diferencial y su significado.

Resolución de problemas y toma de decisiones.





$\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{N}$

$\int_a^b f(x) dx = 0$

$\sin \alpha = \frac{\text{opp.}}{\text{hip.}}$

$\int k \cdot f(x) dx = k \int f(x) dx$

# Unidad de aprendizaje 1

## Modelación matemática del cambio

### Categorías de aprendizaje

■ **C1.** Procedural.

*Subcategorías:*

- S1.** Elementos aritméticos - algebraicos.
- S2.** Elementos geométricos.
- S3.** Elementos variacionales.

■ **C2.** Procesos de intuición y razonamiento.

*Subcategorías:*

- S3.** Pensamiento formal.

■ **C3.** Solución de problemas y modelación.

*Subcategorías:*

- S1.** Uso de modelos.
- S3.** Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios.
- S4.** Manejo de datos e incertidumbre.

■ **C4.** Interacción y lenguaje matemático.

*Subcategorías:*

- S1.** Registro escrito, simbólico, algebraico e iconográfico.

### Metas de aprendizaje:

- **C1M1.** Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos de ciencia y de su entorno.
- **C1M3.** Comprueba los procedimientos usados en la resolución de problemas utilizando diversos métodos, empleando recursos tecnológicos o la interacción con sus pares.
- **C2M1.** Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.
- **C3M1.** Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto.
- **C3M3.** Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del pensamiento matemático, de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno.
- **C4M1.** Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.

### Aprendizaje de trayectoria:

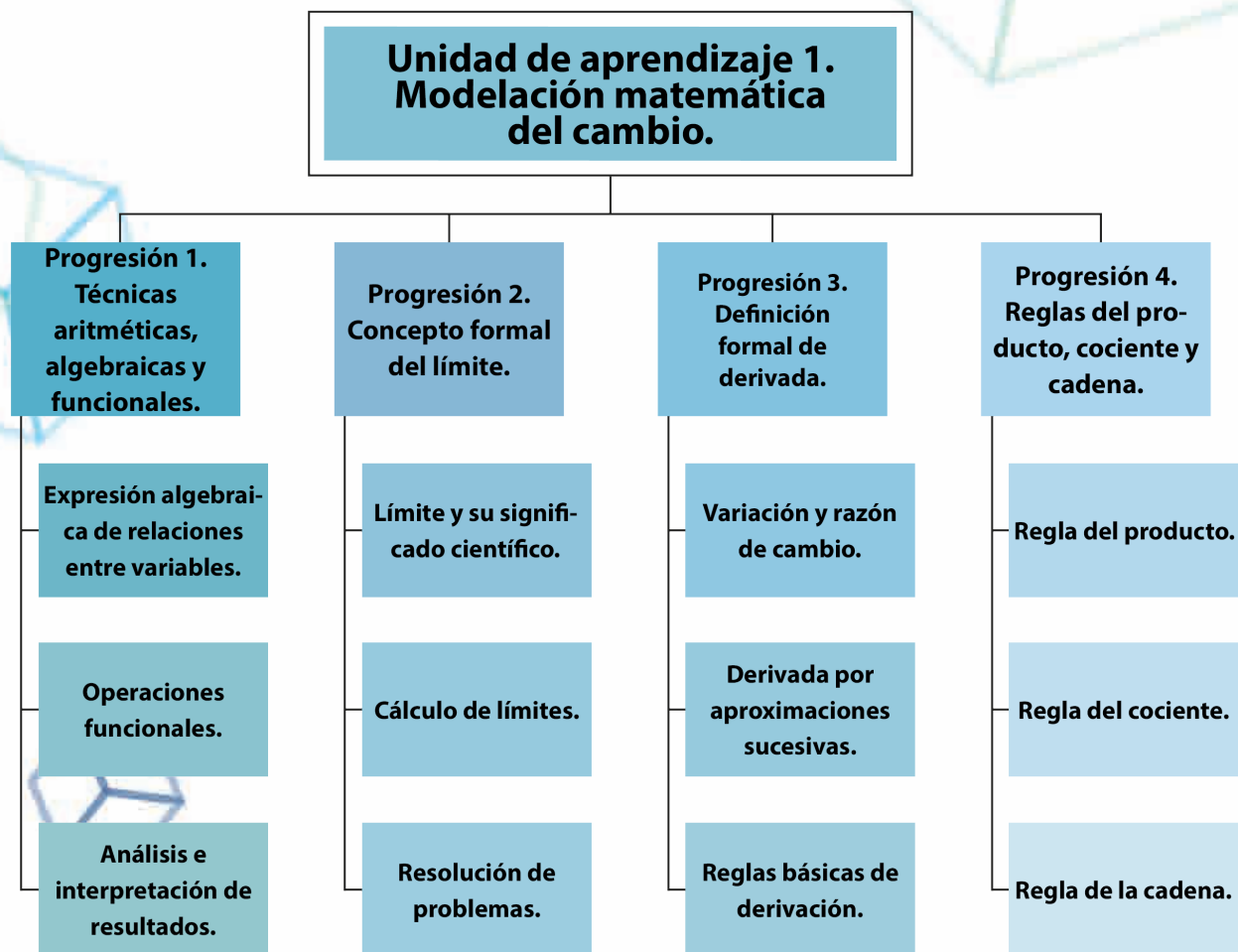
- Valora la aplicación de procedimientos automáticos y algorítmicos, así como la interpretación de sus resultados para anticipar, encontrar y validar soluciones a problemas matemáticos, de áreas del conocimiento y de su vida personal.
- Adopta procesos de razonamiento matemático tanto intuitivos como formales tales como observar, intuir, conjeturar y argumentar, para relacionar información y obtener conclusiones de problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades y de la vida cotidiana).
- Modela y propone soluciones a problemas tanto teóricos como de su entorno, empleando lenguaje y técnicas matemáticas.
- Explica el planteamiento de posibles soluciones a problemas y la descripción de situaciones en el contexto que les dio origen empleando lenguaje matemático y lo comunica a sus pares para analizar su pertinencia.

### Progresiones:

1. Aplica técnicas aritméticas, algebraicas y operaciones funcionales a través del planteamiento de problemáticas de las ciencias, para realizar procesos según lo requiera y adecuar la expresión matemática de manera que el estudiantado analice, compruebe e interprete sus hallazgos y resultados.
2. Analiza de manera formal el concepto de límite, profundizando en el cálculo de límites de funciones mediante sus teoremas para dar solución a problemáticas contextualizadas de las ciencias utilizando métodos analíticos y/o recursos tecnológicos.
3. Analiza la definición formal de derivada a partir del planteamiento de una situación-problema significativa para el estudiantado que evidencie la variación de una recta secante a la recta tangente, con la cual se puedan obtener las reglas de derivación para calcular derivadas de funciones, empleando en caso de ser necesario recursos tecnológicos.
4. Emplea la regla del producto, la regla del cociente y la regla de la cadena en situaciones-problema provenientes de recursos sociocognitivos y/o áreas del conocimiento, en donde la función que describe el fenómeno de estudio requiere el uso de una de estas reglas.

# Presentación

Durante la primera unidad del libro de Taller de pensamiento variacional I, se abordan las primeras cuatro progresiones del programa de estudios para la Dirección General de Bachillerato donde se desarrollan los temas de técnicas aritméticas, algebraicas y funcionales, el concepto formal de límite y derivada, así como, las reglas de derivación de producto cociente y cadena. Los contenidos específicos se visualizan en el siguiente esquema:





# Evaluación diagnóstica

Lee cada planteamiento y elige la opción que responda de forma correcta. Al final de cada pregunta justifica la respuesta.

1. Un estudiante mide la velocidad de un objeto en caída libre y obtiene la función  $v(t) = 4.9t^2 + 2t$ . Si se requiere calcular la velocidad media entre  $t = 2$  y  $t = 5$  segundos, ¿qué expresión permite hacerlo?

a)  $\frac{v(5) - v(2)}{5 - 2}$       b)  $\frac{v(5) + v(2)}{2}$       c)  $v(5) + v(2)$       d)  $\frac{v(2) - v(5)}{5 - 2}$

**Justificación:** \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

2. En un experimento de crecimiento bacteriano, la población sigue  $P(t) = 500e^{0.3t}$ . Para saber cuántas bacterias habrá en  $t = 10$  horas, ¿qué operación algebraica se requiere?

- a) Resolver una ecuación cuadrática  
b) Evaluar la función exponencial en  $t = 10$   
c) Calcular la derivada en  $t = 10$   
d) Integrar de 0 a 10

**Justificación:** \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

3. Dada  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ , ¿cuál es el valor de  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ?

- a) 0      b) 1      c) 2      d) No existe

**Justificación:** \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

4. Para modelar la concentración de un fármaco en sangre  $C(t) = \frac{5t}{t+1}$  mg/L, ¿cuál es el límite cuando  $t \rightarrow \infty$ ?

- a) 0      b) 1      c) 5      d)  $\infty$

**Justificación:** \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

5. Se define la derivada de  $f(x)$  como  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ . Esta expresión representa:

- a) La pendiente de la recta secante cuando  $h \rightarrow \infty$   
b) La pendiente de la recta tangente en  $x$   
c) El área bajo la curva entre  $x$  y  $x + h$   
d) El valor promedio de la función en  $h$

**Justificación:** \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_



# Evaluación diagnóstica

6. Usando la definición formal de derivada, calcula  $f'(x)$  para  $f(x) = 3x^2$ .

a)  $3x$

b)  $6x + h$

c)  $3x^2 + 6xh + 3h^2$

d)  $6x$

Justificación:

---

---

7. Si  $f(x) = (3x^2 + 1)(x^3 - 2x)$ , la derivada se obtiene mediante:

a) Regla de la cadena

b) Regla del cociente

c) Regla del producto

d) Regla de la potencia simple

Justificación:

---

---

8. En un modelo de crecimiento poblacional con depredación, se tiene  $N(t) = \frac{1000t}{t^2 + 1}$ . Para calcular  $N'(t)$  se requiere:

a) Regla del producto

b) Regla de la cadena

c) Regla del cociente

d) Solo derivada de una constante

Justificación:

---

---

9. Dada  $h(x) = \sin(4x^2 + 1)$ , ¿qué regla es indispensable para derivar?

a) Regla del producto

b) Regla del cociente

c) Regla de la suma

d) Regla de la cadena

Justificación:

---

---

10. En física, la posición de una partícula es  $x(t) = (2t + 1)^3$ . ¿Cuál es su velocidad  $v(t) = x'(t)$ ?

a)  $3(2t + 1)^2$

b)  $6(2t + 1)^2$

c)  $2(2t + 1)^2$

d)  $6(2t + 1)^3$

Justificación:

---

---

# Técnicas aritméticas, algebraicas y funcionales



El estudio de fenómenos en ciencias naturales, sociales y formales exige la manipulación de cantidades y relaciones expresadas en lenguaje matemático. Cuando se enfrenta una situación problemática se debe reconocer en ella las operaciones aritméticas básicas, las transformaciones algebraicas y las acciones sobre funciones que conducen a una solución válida. Esta progresión de aprendizaje se orienta hacia la selección consciente de la herramienta matemática pertinente, ya sea una suma, una factorización, una evaluación funcional o una simplificación de expresiones.

La aplicación de técnicas aritméticas, algebraicas y operaciones funcionales no constituye un fin en sí misma, sino un medio para modelar, resolver e interpretar problemas reales. Cada problemática de las ciencias presenta variables, constantes y relaciones que se traducen en expresiones matemáticas. Al realizar procesos ordenados según la naturaleza del problema: se calcula, despeja, sustituye, simplifica o compone funciones. La adecuación de la expresión matemática consiste en transformar una forma compleja o poco manejable en otra equivalente pero más operativa, sin perder de vista el significado original de las cantidades involucradas.

Por último, el análisis, comprobación e interpretación de los hallazgos cierran el ciclo de resolución. Cuando se verifica la coherencia de los resultados mediante la sustitución inversa, el análisis dimensional o la aproximación numérica. La interpretación vincula el resultado matemático con la pregunta científica planteada, respondiendo no solo “cuánto” sino “qué significa ese valor en el contexto del problema”. De esta manera, se logra transitar con fluidez entre el lenguaje cotidiano de las ciencias y el lenguaje simbólico de las matemáticas.



Resuelve el siguiente planteamiento.

Un equipo de estudiantes de bachillerato participa en un proyecto de monitoreo ambiental. Colocan un sensor de temperatura en un invernadero experimental. La temperatura en grados Celsius durante un día está modelada por la función:

$$T(h) = \frac{2h^2 + 12h}{2h} + 5$$

Donde se representan las horas transcurridas desde la medianoche (varía de 0 a 24). Los estudiantes desean conocer la temperatura a las 4 horas (4:00 a. m.) y también saber si la expresión puede escribirse de forma más sencilla para hacer cálculos rápidos durante la jornada. Un compañero propone simplificar la fracción antes de evaluar, mientras que otro afirma que primero debe evaluarse con la expresión original.

¿Cuál de los siguientes procedimientos es correcto y por qué?

- a) Evaluar primero  $T(4)$  con la expresión original, sin simplificar, y luego simplificar el resultado.
- b) Simplificar de manera algebraica la expresión a  $T(h) = h + 11$  y luego evaluar en  $h = 4$ .
- c) Cancelar la  $h$  del numerador y denominador sin considerar que  $h$  puede ser cero.
- d) Sustituir  $h = 4$  solo el numerador y dejar el denominador  $2h$  sin cambiar.

Justifica la respuesta elegida.

---



---



---



## Desarrollo

### Expresión algebraica de relaciones entre variables

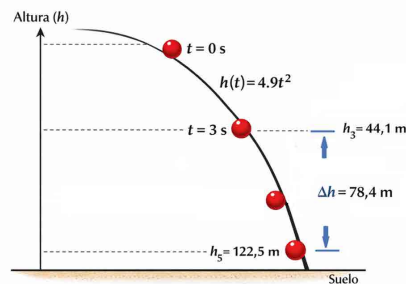
Un problema científico puede expresarse mediante una función, una ecuación o un conjunto de datos. La primera decisión consiste en reconocer si la solución exige una operación aritmética (suma, resta, multiplicación, división), algebraica (despeje, factorización, solución de ecuaciones) o funcional (evaluación, composición, inversión de funciones).

Para comprender lo anterior es necesario analizar el siguiente planteamiento:

En un experimento de caída libre, la altura de un objeto está dada por  $h(t) = 4.9t^2$ . Se requiere conocer la altura después de 3 segundos y la diferencia de altura entre los instantes  $t = 3$  y  $t = 5$ .

Para dar solución al planteamiento se sigue el siguiente algoritmo:

1. **Identificar la operación:** Evaluación funcional para  $h(3)$  y resta aritmética para la diferencia.
2. **Ejecutar la evaluación:**  $h(3) = 4.9 \times (3)^2 = 4.9 \times 9 = 44.1$  metros.
3. **Calcular la segunda altura:**  $h(5) = 4.9 \times 25 = 122.5$  metros.
4. **Realizar la resta:**  $h(5) - h(3) = 122.5 - 44.1 = 78.4$  metros.
5. **Interpretar:** El objeto cae 78.4 metros adicionales entre los segundos 3 y 5.

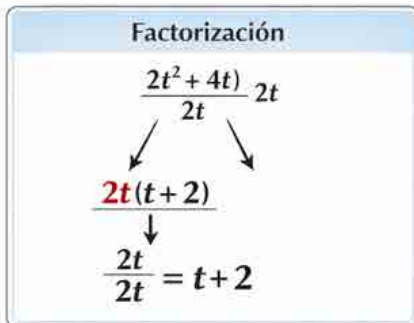


Representación gráfica de la diferencia de alturas calculada mediante evaluación funcional y resta aritmética.

## Operaciones funcionales

En ocasiones, la expresión obtenida del enunciado no resulta operativa. Es necesario transformar la expresión mediante álgebra (factorización, simplificación, racionalización) sin alterar su significado, facilitando así el cálculo o la interpretación.

El siguiente problema plantea como se puede llevar a cabo esta operación funcional.



Proceso de simplificación algebraica para adecuar la expresión matemática.

La concentración de un fármaco en sangre sigue  $C(t) = \frac{2t^2 + 4t}{2t}$ . Se desea una expresión simplificada para evaluar en  $t = 3$ .

El primer paso es identificar la necesidad de realizar la simplificación de la expresión, en este caso, la forma original de la expresión presenta un cociente con factor común en el numerador.

Una vez identificada la necesidad de simplificar la expresión se realiza la factorización del numerador de acuerdo con:

$$2t^2 + 4t = 2t(t + 2)$$

Ahora se simplifica el cociente:

$$\frac{2t(t+2)}{2t} = t+2, \text{ siempre que } t \neq 0$$

Se escribe la expresión adecuada.

$$C(t) = t + 2$$

Es momento de evaluar la expresión para conocer la concentración en un tiempo de 3 horas.

$$\text{Para } t = 3 \text{ horas, } C(3) = 5 \text{ mg/L.}$$

La simplificación permite calcular de forma directa, sin operaciones redundantes.

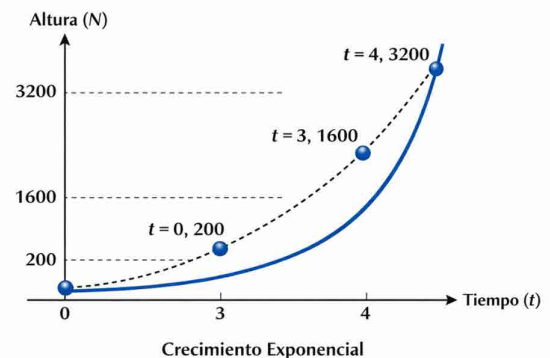
## Análisis e interpretación de resultados

Una vez obtenido el resultado numérico o algebraico, se verifica la coherencia con el problema original. La comprobación puede realizarse mediante sustitución inversa, aproximaciones o análisis dimensional. La interpretación vincula el resultado matemático con la variable del contexto científico.

Por ejemplo:

La población de bacterias crece según  $P(t) = 200 \times 2^t$  ( $t$  en horas). Se calcula  $P(4)$  y se comprueba el resultado.

- Calcular:**  $P(4) = 200 \times 2^4 = 200 \times 16 = 3200$  bacterias.
- Comprobación alternativa:** Si en  $t = 3$ ,  $P(3) = 200 \times 8 = 1600$ . En una hora más (de 3 a 4) la población se duplica, por lo que  $1600 \times 2 = 3200$ . Coincide.
- Interpretación en contexto:** A las 4 horas, existen 3200 bacterias. La tasa de duplicación horaria se confirma.



Verificación gráfica del resultado: de 1600 a 3200 bacterias entre  $t = 3$  y  $t = 4$ .



**Cierre**



**Práctica de aprendizaje**



Resuelve cada planteamiento aplicando técnicas aritméticas, algebraicas o funcionales según corresponda. Al final se proporciona la respuesta correcta.

**1.** La velocidad de un móvil es  $v(t) = 3t^2 + 2t$ . ¿Cuál es la velocidad media entre  $t = 1$  y  $t = 4$ ?

**2.** Dada  $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ , ¿cuál es la expresión simplificada válida para  $x \neq 3$ ?

---

3. En un cultivo,  $N(t) = 500 \cdot 3^{t/2}$  (t en días). ¿Cuántos organismos hay en  $t = 4$  días?

---

4. Un estudiante obtiene  $h = \sqrt{16} + \sqrt{9}$  al calcular distancias. ¿Cuál es el valor numérico correcto?

---

5. La energía cinética es  $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ . Si  $m = 4$  kg y  $v = 3$  m/s, ¿cuál es el valor de  $E_k$ ?



# Estudio independiente

Resuelve los siguientes planteamientos y explica tu respuesta.

1. Un automóvil recorre 150 km en 3 horas. Calcula su velocidad promedio. Explica el procedimiento que utilizaste.

---

---

---

2. La densidad de un material se calcula con la fórmula ( $D = m/V$ ). Si un objeto tiene una masa de 240 g y un volumen de  $80 \text{ cm}^3$ , calcula su densidad. Justifica cada paso.

---

---

---

3. Una bacteria se divide cada 20 minutos. Si al inicio hay 500 bacterias, ¿cuántas habrá después de una hora?, (considera crecimiento exponencial:  $(N = N_0 \times 2^n)$ , donde  $(n)$  es el número de divisiones.) Comprueba tu resultado con otro método o estimación e interpreta su significado.

---

---

---

Autoevalúa los aprendizajes de la progresión con la siguiente rúbrica.

Criterio	Nivel Inicial (1 pt.)	Nivel Intermedio (2 pts.)	Nivel Avanzado (3 pts.)
<b>Aplico técnicas aritméticas, algebraicas y funcionales en problemas de ciencias</b>	Puedo identificar operaciones básicas, pero me cuesta aplicarlas de forma correcta en problemas científicos.	Aplico operaciones aritméticas, algebraicas o funcionales de forma adecuada en la mayoría de los problemas.	Selecciono y aplico con precisión técnicas aritméticas, algebraicas y funcionales según lo que requiere cada problema científico.
<b>Realizo procesos matemáticos de manera ordenada y justificada</b>	Resuelvo los problemas sin seguir un proceso claro o cometo errores al justificar mis pasos.	Sigo un proceso ordenado y justifico algunos pasos clave en mis procedimientos.	Desarrollo procesos matemáticos completos, ordenados y justificados, explicando por qué cada paso es necesario.
<b>Analizo, compruebo e interpreto mis resultados en el contexto científico</b>	Me cuesta verificar si mis resultados tienen sentido o cómo se relacionan con el problema científico.	Compruebo mis resultados y doy una interpretación general del fenómeno científico.	Analizo de manera crítica mis resultados, los verifico con distintos métodos y los interpreto con claridad en el contexto del fenómeno científico.

# Concepto formal del límite



La modelización de fenómenos continuos en física, química, biología y economía requiere una herramienta matemática capaz de describir el comportamiento de una función cuando su variable se aproxima a un valor determinado. El concepto de límite constituye esa herramienta fundamental. Cuando se analiza de manera formal el límite de una función, se comprende que no se trata solo de evaluar la función en un punto, sino de observar hacia qué valor tienden las imágenes cuando la variable se acerca a ese punto, incluso si la función no está definida en él.

El cálculo de límites se apoya en un conjunto de teoremas que permiten operar con límites de sumas, productos, cocientes y composiciones de funciones sin necesidad de recurrir cada vez a la definición **épsilon-delta**. Estos teoremas simplifican el proceso analítico y proporcionan seguridad en los resultados. A lo largo de la progresión se profundiza en la aplicación mediante la resolución de límites algebraicos, límites con indeterminaciones y límites laterales. Cada situación problemática extraída de las ciencias, como la velocidad instantánea, la concentración de un fármaco al paso del tiempo o la descarga de un capacitor, exige la selección del teorema adecuado y, en ocasiones, la manipulación algebraica para eliminar una indeterminación.

Los métodos analíticos (factorización, racionalización, uso de límites notables) se complementan con recursos tecnológicos. La gráfica de una función generada por software permite visualizar el comportamiento tendencial, mientras que las calculadoras simbólicas verifican los límites calculados de forma manual. Al integrar ambos enfoques: el análisis formal para comprender el porqué de cada paso y la tecnología para explorar, comprobar y resolver problemas contextualizados con mayor eficiencia. De esta manera, el límite deja de ser una abstracción y se convierte en una herramienta operativa para interpretar fenómenos donde la aproximación y la tendencia definen la esencia del cambio.



Lee el siguiente caso:

Un estudiante diseña un experimento para medir la velocidad de un objeto en caída libre justo en el instante en que toca el suelo. La posición del objeto (en metros) está dada por  $s(t) = 4.9t^2$ , donde  $t$  es el tiempo en segundos. El estudiante sabe que la velocidad instantánea en  $t = 2$  segundos corresponde al límite de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo tiende a cero. Para ello, define la velocidad media entre  $t = 2$  y  $t = 2 + h$  como:

$$V_{\text{media}} = \frac{s(2+h) - s(2)}{h}$$

El estudiante simplifica la expresión y obtiene  $v_{\text{media}} = 4.9(4+h)$ . Luego se pregunta: ¿qué sucede con esta expresión cuando  $h$  se hace muy pequeño, es decir, cuando  $h \rightarrow 0$ ? ¿Puede sustituir  $h = 0$  en  $4.9(4+h)$  para obtener la velocidad instantánea?

Un compañero argumenta que sí, porque la función es continua. Otro compañero advierte que en el cálculo original de la velocidad media existe una división entre  $h$ , por lo que no se puede sustituir  $h = 0$  de manera directa en esa forma original, pero después de simplificar sí es posible.

¿Cuál es el valor de la velocidad instantánea en segundos y cuál es el razonamiento correcto?, justifica tu respuesta.

---



---



## Desarrollo

### Límite y su significado científico

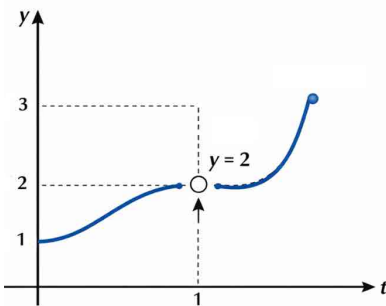
En el estudio de fenómenos naturales, muchas magnitudes no pueden medirse de forma directa en un instante exacto, sino a través de aproximaciones sucesivas. La velocidad instantánea de un móvil, la concentración de un fármaco al alcanzar el equilibrio o la corriente eléctrica en el momento de cerrar un interruptor son ejemplos donde interesa conocer el comportamiento de una variable cuando otra se acerca a un valor determinado. El límite de una función constituye la herramienta matemática que formaliza esta idea de aproximación sin necesidad de alcanzar el punto exacto.

Una función  $f(x)$  describe la relación entre dos variables en un sistema científico. El límite de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a un valor  $a$ , escrito como:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , representa el valor al que se aproximan las imágenes de la función cuando la variable independiente se acerca hacia  $a$ , ya sea por la izquierda o por la derecha. Este concepto resulta importante cuando la función no está definida en  $a$  o cuando se desea estudiar una tendencia.

El siguiente ejemplo muestra cómo se aplica este concepto.

Un objeto se mueve según la función posición  $s(t) = \frac{t^2 - 1}{t - 1}$  metros, donde  $t$  es el tiempo en segundos. Se requiere determinar la posición hacia la que tiende el objeto cuando el tiempo se aproxima a 1 segundo, aunque la función no está definida en  $t = 1$ .

Para dar solución al planteamiento es necesario realizar los siguientes pasos:



Representación gráfica del límite de  $s(t) = \frac{t^2 - 1}{t - 1}$  cuando  $t \rightarrow 1$ . La función tiende a 2, aunque no esté definida en  $t = 1$ .

1. Evaluar de manera directa  $s(1)$  produce  $\frac{1 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$ , una indeterminación. El límite estudia la tendencia, no el valor en el punto.
2. Factorizar el numerador:  $t^2 - 1 = (t - 1)(t + 1)$ .
3. Simplificar la expresión: Para  $t \neq 1$ ,  $s(t) = \frac{(t - 1)(t + 1)}{t - 1} = t + 1$ .
4. Calcular el límite:  $\lim_{t \rightarrow 1} s(t) = \lim_{t \rightarrow 1} (t + 1) = 2$  metros.
5. Interpretación científica: El objeto se aproxima a la posición de 2 metros cuando el tiempo se acerca a 1 segundo, aunque en  $t = 1$  la función no entregue un valor. Esta situación modela, por ejemplo, una discontinuidad evitable en un experimento.

## Cálculo de límites

### Teoremas fundamentales para el cálculo de límites.

Para evitar recurrir cada vez a la definición formal, se emplean teoremas que permiten operar con límites. Algunos de los más utilizados son:

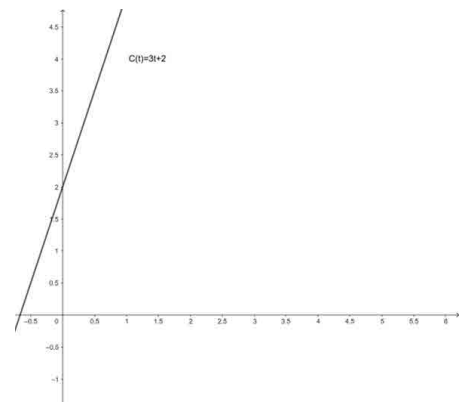
- ➔ Límite de una suma:  $\lim(f + g) = \lim f + \lim g$
- ➔ Límite de un producto:  $\lim(f \cdot g) = \lim f \cdot \lim g$
- ➔ Límite de un cociente:  $\lim\left(\frac{f}{g}\right) = \left(\frac{\lim f}{\lim g}\right)$ , siempre que  $\lim g \neq 0$
- ➔ Límite de una constante:  $\lim_{x \rightarrow a} c = c$
- ➔ Límite de la función identidad:  $\lim_{x \rightarrow a} x = a$



Estos teoremas permiten calcular límites de funciones polinómicas, racionales, trigonométricas y exponenciales mediante sustitución directa, siempre que no se presente una indeterminación.

Para comprender la aplicación de los teoremas analiza el siguiente ejemplo:

La concentración de un reactivo en una reacción química está dada por  $C(t) = \frac{3t^2 + 2t}{t}$  mol/L, con  $t > 0$  en minutos. Se desea saber la concentración cuando el tiempo tiende a  $0^+$  (justo al inicio de la reacción).



Comportamiento de la concentración cuando  $t \rightarrow 0^+$ . El límite es 2 mol/L, valor que representa la concentración inicial efectiva.

1. Intentar sustitución directa:  $C(0) = \frac{0}{0}$ , indeterminación.
2. Simplificar de manera algebraica: Para  $t \neq 0$ ,  $\frac{3t^2 + 2t}{t} = 3t + 2$ .
3. Aplicar teorema del límite de una suma:  
 $\lim_{t \rightarrow 0} 3t + 2 = \lim_{t \rightarrow 0} 3t + \lim_{t \rightarrow 0} 2 = 3 \cdot 0 + 2 = 2$ .
4. Interpretación: La concentración tiende a 2 mol/L al inicio de la reacción, aunque la expresión original no permita evaluar en  $t = 0$ .

### Resolución de problemas

Las indeterminaciones más comunes son  $0/0$ ,  $\infty/\infty$ ,  $\infty - \infty$ ,  $0 \cdot \infty$ ,  $1^\infty$ ,  $0^0$ ,  $\infty^0$ . Las más comunes son las que presentan la indeterminación  $0/0$  en funciones racionales y con raíces. Los métodos analíticos incluyen factorización, racionalización y aplicación de límites notables como  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x/x = 1$ . Los recursos tecnológicos (calculadoras gráficas, software como GeoGebra o Wolfram Alpha) permiten verificar los límites obtenidos y explorar comportamientos tendenciales.

Es momento de resolver un planteamiento para resolver los límites.

La tasa de crecimiento de una población bacteriana expuesta a un antibiótico sigue  $r(x) = \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$ , donde  $x$  representa la concentración del antibiótico (en mg/L). Se requiere calcular  $\lim_{x \rightarrow 0} r(x)$ .

1. Identificar la indeterminación:

$$\text{Sustituyendo } x = 0: \frac{\sqrt{4-2}}{0} = \frac{2-2}{0} = \frac{0}{0}.$$

2. Racionalizar el numerador:

Multiplicar numerador y denominador por  $\sqrt{x+4} + 2$ :

$$\frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+4} + 2}{\sqrt{x+4} + 2} = \frac{(x+4) - 4}{x\sqrt{x+4} + 2} = \frac{x}{x\sqrt{x+4} + 2}$$

**3. Simplificar:**

Para  $x \neq 0$

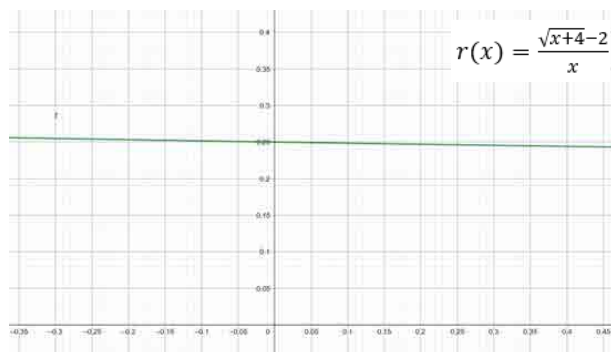
$$\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}$$

**4. Calcular el límite:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4} = 0.25$$

**5. Interpretación:**

La tasa de crecimiento inicial (cuando la concentración del antibiótico tiende a cero) es de 0.25 unidades por mg/L.



Límite de la tasa de crecimiento cuando la concentración del antibiótico tiende a cero. El valor del límite es 0.25.



**Cierre**



**Práctica de aprendizaje**



Calcula el límite en cada planteamiento.

1.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

2.  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(3t)}{t}$

---

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$

---

4. Un cultivo bacteriano tiene una población  $P(t) = \frac{1000t}{t+1}$  (t en horas). ¿Cuál es el límite de la población cuando  $t \rightarrow \infty$ ?

---

5.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^3 - 8}{h}$



# Estudio independiente

Responde los siguientes planteamientos y explica tu respuesta.

1. Analiza el límite de la función cuando  $(x)$  tiende a 1.

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

---

---

---

---

Empty dashed box for writing the answer to question 1.

2. Calcula el límite:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

---

---

---

---

Empty dashed box for writing the answer to question 2.



# Estudio independiente

3. La posición de un objeto está dada por:

$$s(t) = 3t^2 + 2t$$

Calcula la velocidad instantánea en  $t = 2$  usando el límite del promedio de velocidades.

---

---

---

---

Autoevalúa los aprendizajes de la progresión con la siguiente rúbrica.

Criterio	Nivel Inicial (1 pt.)	Nivel Intermedio (2 pts.)	Nivel Avanzado (3 pts.)
<b>Análisis del concepto de límite de manera formal</b>	Puedo mencionar qué es un límite, pero me cuesta explicarlo de forma adecuada o identificarlo en una función.	Explico el concepto de límite de forma general y lo aplico en casos sencillos.	Analizo el límite de una función de manera formal, identificando comportamientos, tendencias y condiciones necesarias para su existencia.
<b>Calculo límites utilizando teoremas, métodos analíticos y/o recursos tecnológicos</b>	Intento calcular límites, pero cometo errores o no uso los teoremas adecuados.	Calculo límites aplicando teoremas básicos y algunos métodos analíticos o tecnológicos.	Selecciono y aplico con precisión teoremas de límites, técnicas analíticas y/o herramientas tecnológicas para resolver límites complejos.
<b>Aplico el análisis de límites para resolver problemáticas contextualizadas de las ciencias</b>	Me cuesta relacionar el cálculo de límites con situaciones científicas reales.	Relaciono el cálculo de límites con fenómenos científicos simples y explico su utilidad.	Analizo fenómenos científicos usando límites, interpreto resultados y explico su significado dentro del contexto científico.



# Práctica transversal



Lee con atención y aplica tus conocimientos para resolver el siguiente problema aplicado a las ciencias sociales.

En un estudio de sociología y comunicación, se analiza la propagación de una noticia falsa en una red social durante las primeras horas después de su publicación. El porcentaje de usuarios de una población que han recibido la noticia (modelo de difusión acumulada) sigue la función:

$$P(t) = \frac{80t}{t+5} \text{ donde } t \text{ es el tiempo en horas, } t \geq 0.$$

Se desea conocer el porcentaje máximo de usuarios que tarde o temprano recibirán la noticia a largo plazo, así como la tasa de difusión justo al inicio del fenómeno ( $t \rightarrow 0^+$ ). Ambos cálculos requieren el uso de límites.

1. ¿Hacia qué valor tiende el porcentaje  $P(t)$  cuando el tiempo transcurre de forma indefinida ( $t \rightarrow \infty$ )?

---

---

2. ¿Cuál es el límite del cociente incremental que representa la velocidad inicial de difusión, es decir,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(t) - P(0)}{t - 0} ?$$

---

---

# Taller de pensamiento variacional

# 1

La Editorial Planea tiene como misión crear materiales didácticos de calidad, con los contenidos adecuados para impactar positivamente en la formación de los estudiantes, desarrollando sus conocimientos, habilidades y actitudes, que los transforman en jóvenes capaces de comprender su entorno e influir en él, aprender de manera autónoma a largo de su vida, ser consciente de sus destrezas para resolver problemas y aceptar retos que lo ayuden a alcanzar su metas, ser sensibles al arte y sus expresiones, asimismo activar la participación ciudadana que reafirme su conciencia cívica y ética, fomentando una actitud respetuosa a la interculturalidad, diversidad de creencias, valores e ideas, asumiendo un pensamiento crítico que ayude al desarrollo sustentable de su comunidad.

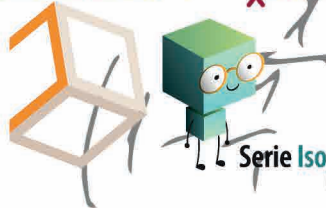
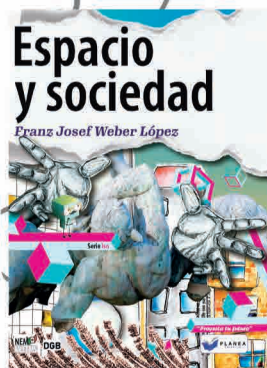
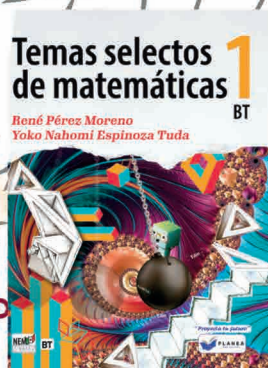
El libro de **Taller de pensamiento variacional 1**, está desarrollado bajo los Principios de la Nueva Escuela Mexicana, teniendo como eje rector el Nuevo Modelo Educativo de la Educación Media Superior y el programa de estudio por progresiones para el **Bachillerato General**, el cual propone los siguientes aprendizajes trayectoria de este Recurso Sociocognitivo:

- Valora la aplicación de procedimientos automáticos y algorítmicos, así como la interpretación de sus resultados para anticipar, encontrar y validar soluciones a problemas matemáticos, de áreas del conocimiento y de su vida personal.
- Adopta procesos de razonamiento matemático tanto intuitivos como formales tales como observar, intuir, conjeturar y argumentar, para relacionar información y obtener conclusiones de problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades y de la vida cotidiana).
- Modela y propone soluciones a problemas tanto teóricos como de su entorno, empleando lenguaje y técnicas matemáticas.

Explica el planteamiento de posibles soluciones a problemas y la descripción de situaciones en el contexto que les dio origen empleando lenguaje matemático y lo comunica a sus pares para analizar su pertinencia.

En la Editorial Planea tenemos un compromiso por desarrollar materiales que cumplan con las expectativas de las comunidades educativas.

## Titulos relacionados



771-159-1900  
[www.planeaeditorial.com.mx](http://www.planeaeditorial.com.mx)  
[informes@planeaeditorial.com.mx](mailto:informes@planeaeditorial.com.mx)