Temas selectos de matemáticas 1

DGB

René Pérez Moreno
Yoko Nahomi Espinoza Tuda

Temas selectos de matemáticas 1

Versión actualizada 2026

Copyright © Editorial Planea

ISBN: 978-607-5902-30-2 **Clave:** 20264

Impreso en México

Contacto: 771-655-6186

Correo electrónico:
informes@editorialplanea.com.mx

Se reservan todos los derechos. Está prohibida la reproducción, almacenamiento en sistemas de recuperación o transmisión de estas publicaciones, ya sea de forma electrónica, mecánica, mediante fotocopia, grabación u otros medios, sin el consentimiento previo del editor. Esto incluye su distribución en redes, almacenamiento electrónico o transmisión para fines de aprendizaje a distancia.

Editor en jefe: Cosme Lorenzo Rodríguez

Autores: René Pérez Moreno y Yoko Naomi Espinoza Tuda

Correctora: Angélica Maria Alvarado Carreón

Diseño: Nasbbi Irazú Portes Loeza

Diseño maestro Iso: Liliana Cruz García

Imágenes: Adobe Stock

Aviso de exención de responsabilidad:

Los enlaces incluidos en este libro no son propiedad de Editorial Planea. Por lo tanto, no tenemos control sobre la información proporcionada por los sitios web en un momento determinado, y no podemos garantizar la exactitud de la información proporcionada por terceros (enlaces externos). Aunque se recopila cuidadosamente y se actualiza constantemente, no asumimos responsabilidad alguna por su exactitud, integridad o actualidad.

Los artículos atribuidos a los autores reflejan sus opiniones y a menos que se indique específicamente, no representan las opiniones del editor. Además, la reproducción de este libro o cualquier material de los sitios web incluidos en él no está autorizada, ya que dicho material puede estar sujeto a derechos de propiedad intelectual.

Los derechos pertenecen a sus respectivos propietarios, y Editorial Planea no se hace responsable de la información mostrada en los enlaces proporcionados.

Presentación

En la Editorial Planea estamos comprometidos por ofrecer materiales didácticos de alta calidad, apegados al Nuevo Modelo Educativo de la Educación Media Superior, basado en la premisa de desarrollar en ti joven estudiante un aprendizaje situado en tu entorno, que te ayude en tu día a día, adaptándote a los cambios y brindarte un constante aprendizaje inclusivo, pluricultural, colaborativo y equitativo, basado en los principios de la Nueva Escuela Mexicana.

Este libro se encuentra apegado al 100 % al programa de estudio basado en progresiones de aprendizaje del NME de la EMS, abordando las categorías y subcategorías para lograr los aprendizajes meta que propone el programa de Temas Selectos de Matemáticas I, para la Dirección General de Bachillerato (DGB).

Estas progresiones, se encuentran organizadas en tres unidades de aprendizaje, la primera aborda la "Geometría y trigonometría", desarrollando las primeras tres progresiones de estudio referentes a los elementos básicos de la geometría y trigonometría, así como las relaciones matemáticas para su aplicación y los principios de la Geometría Euclidiana; en la segunda unidad denominada "Recta, parábola y circunferencia" se analizan las ecuaciones de estos espacios geométricos aplicando los principios de la geometría analítica, correspondientes a las progresiones cuatro, cinco y seis del programa de estudio; finalmente, en la tercera unidad nombrada "Ecuaciones generales de las cónicas y fractales" se analizan las progresiones siete, ocho y nueve que corresponden a los objetos de aprendizaje sobre la elipse, ecuaciones generales y la interpretación de fractales.

Este libro, está diseñado para ti, trata de proporcionar elementos que te ayuden a la comprensión de los conceptos geométricos y trigonométricos que fomentarán el desarrollo del pensamiento matemático a través del entendimiento y modelación matemática del entorno.

La Nueva Escuela Mexicana NEM

La Nueva Escuela Mexicana (NEM) parte de un diagnóstico donde la educación se entendía como tres ciclos sin conexión, la educación básica (preescolar, primaria y secundaria), la educación media superior y la educación superior, con base en este diagnóstico se construye una propuesta donde la educación debe ser entendida para toda la vida, bajo el concepto de aprender a aprender, la actualización continua, adaptación a los cambios y el aprendizaje permanente.

La NEM propone un plan de 23 años en los diferentes niveles educativos, los cuales estén interconectados entre sí, donde se potencialice la formación integral de las niñas, niños, adolescentes y jóvenes con el objetivo de promover el aprendizaje de excelencia, inclusivo, pluricultural, colaborativo y equitativo a lo largo de su formación.

Para alcanzar el bienestar y la prosperidad incluyente, la NEM se fundamenta en los siguientes principios:

Fomento de la identidad con México. El amor a la patria, el aprecio por su cultura, el conocimiento de su historia y el compromiso de los valores plasmados en la Constitución Política, son las acciones que forman este principio.

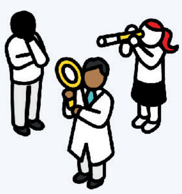
Responsabilidad ciudadana. El principio implica la aceptación de derechos y deberes personales y comunes, el respeto por los valores cívicos por parte de los estudiantes formados en la NEM es esencial para transmitir los valores de honestidad, respeto, justicia, solidaridad, reciprocidad, lealtad, libertad, equidad y gratitud.

Honestidad. Se destaca este valor dentro de la responsabilidad social de los estudiantes, el cual permite formar una sociedad con base en la confianza y el sustento de la verdad de todas las acciones para permitir una sana relación entre los ciudadanos.

Respeto de la dignidad humana. Promover el respeto irrestricto a la dignidad y los derechos humanos de las personas, con base en la convicción de la igualdad de todos los individuos en derechos, trato y oportunidades.

Respeto por la naturaleza y cuidado del medio ambiente. La conciencia ambiental favorece la protección y conservación del medio ambiente, la prevención de la contaminación y cambio climático comienza con la educación del desarrollo sostenible.

Promoción de la interculturalidad. El aprecio y la comprensión por la diversidad cultural y lingüística, así como, el diálogo y el intercambio cultural es una fuerza motriz para tener una vida intelectual, afectiva, moral y espiritual.



Participación en la transformación de la sociedad. La superación de cada persona por iniciativa propia es la base de este principio, el sentido social de la educación permite construir relaciones cercanas, solidarias y fraternas que superan las indiferencias y la apatía por transformar la sociedad.

Promoción de la cultura de la paz. El objetivo de la agenda 2030 que promueve "Paz, justicia e instituciones sólidas", tiene como fundamento promover sociedades pacíficas, inclusivas, que faciliten el desarrollo sostenible, el acceso a la justicia para todos y la construcción a todos los niveles de instituciones eficaces e inclusivas que rindan cuentas.

Conoce tu libro

Dentro del libro se encuentra desarrollado el Nuevo Modelo Educativo de la Educación Media Superior, el cual se basa en un programa de estudio por progresiones de aprendizaje, las cuales se desarrollan en tres momentos que son:

Apertura. En este primer momento se busca despertar el interés y la motivación del estudiante por el tema que se va a abordar.

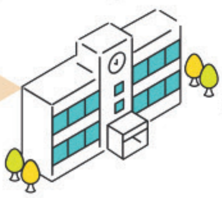
Desarrollo. Se presenta el contenido y se realiza una explicación clara y detallada de los conceptos clave.

Cierre. En este último momento se busca consolidar los aprendizajes y hacer una evaluación del proceso.

También se encuentran las secciones:

Evaluación diagnóstica. Se encuentra al inicio de cada unidad de aprendizaje, ayuda a identificar las fortalezas y debilidades con los temas que se van a abordar.

Aprendizaje situado en contextos:



Escuela

Aula

Comunidad

Prácticas transversales.

Donde se enlazan los aprendizajes de los recursos sociocognitivos con las disciplinas de las áreas de conocimiento.

Prácticas socioemocionales.

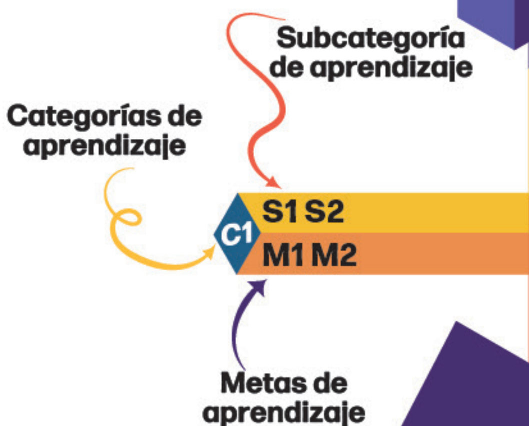
El curriculum ampliado se vincula con los recursos sociocognitivos, áreas de conocimiento por medio de los diferentes ámbitos de los recursos socioemocionales que están presentes en este tipo de actividades.

Prácticas de aprendizaje. La mejor manera de aplicar los conocimientos y habilidades aprendidas es a través de este tipo de prácticas, las cuales están numeradas, ubicadas en un contexto de aprendizaje y potencializando un principio de la NEM, como se muestra en el siguiente ejemplo:

Lectura NEM. Es una actividad de comprensión lectora que aborda uno de los principios de la Nueva Escuela Mexicana.

Evaluación de la unidad de aprendizaje. Son reactivos que abordan los temas de cada unidad de aprendizaje.

Categorías, subcategorías y metas de aprendizaje. Cada progresión tiene al inicio las categorías, subcategorías y metas de aprendizaje que aborda su contenido como se muestra a continuación:



Proyecto Aula - Escuela - Comunidad (PAEC). En estos códigos QR podrás realizar las actividades de las progresiones que son parte del PAEC.

Maestro Iso. Cada vez que veas al maestro Iso, él te explicará la progresión de manera dinámica, escaneando el código QR.

Progresiones de aprendizaje

1. Resuelve situaciones-problema contextualizadas, a través de la exploración y desarrollo de elementos básicos de la geometría y trigonometría, tales como, ángulos, semejanza, congruencia y autosemejanza, observando la relación entre los lados y ángulos del triángulo rectángulo como razones trigonométricas, destacando la importancia de entes abstractos en la vinculación con otras Unidades de Aprendizaje Curricular, promoviendo el uso de herramientas tecnológicas.

2. Explora algunas leyes y relaciones matemáticas que permitan dar solución a problemas cotidianos a través de la geometría y trigonometría, considera el recíproco del Teorema de Pitágoras, la Ley de Senos, la Ley de Cosenos como una generalización del Teorema de Pitágoras, la circunferencia unitaria, explorando razonamientos y demostraciones sencillas facilitando la formalización de los conceptos.

3. Examina el planteamiento de la Geometría Euclidiana, a través del desarrollo histórico de los postulados de Euclides, particularmente “el quinto postulado de Euclides” y considera escenarios donde no se cumple el mismo, analizando las diferencias entre la Geometría Euclidiana y no Euclidianas considerando ejemplos reales como el modelo terráqueo de la tierra, los viajes aeronáuticos y el estudio de la astronomía, lo cual permita observar cómo estas han sido de utilidad en la solución de problemas reales.

4. Resuelve problemas de su entorno mediante la ecuación de la línea recta según necesite (punto-pendiente, pendiente ordenada al origen, dos puntos) y considera sistemas de ecuaciones lineales los cuales resuelve usando el método de Cramer o el método de Gauss-Jordan para resolver matrices y hallar su solución de manera que el estudiantado pueda analizar, comprobar e interpretar sus hallazgos y resultados.

5. Explora la parábola como sección cónica, a través de la modelación y solución de situaciones-problema presentes en su entorno y en otras Unidades de Aprendizaje Curricular, reflexionando la manera en qué entes abstractos de la matemática se encuentran presentes en la naturaleza y le permiten describirla, haciendo uso de herramientas tecnológicas disponibles.

6. Analiza a la circunferencia desde la perspectiva de la Geometría Analítica como una sección cónica, considerando el planteamiento y modelación de problemáticas reales a las cuales da solución usándola como herramienta, haciéndose consciente de la importancia de esta curva en el estudio de estructuras que están presentes en su entorno, usando herramientas tecnológicas a su disposición para comprobar y compartir sus resultados con sus pares.

7. Aplica la Elipse como sección cónica para modelar y dar solución a problemáticas reales de su interés que provienen de otras Unidades de Aprendizaje Curricular, observando cómo esta curva está presente en fenómenos astronómicos y ópticos, de manera que el estudiantado analice, compruebe e interprete sus hallazgos haciendo uso de métodos analíticos y/o herramientas tecnológicas disponibles.

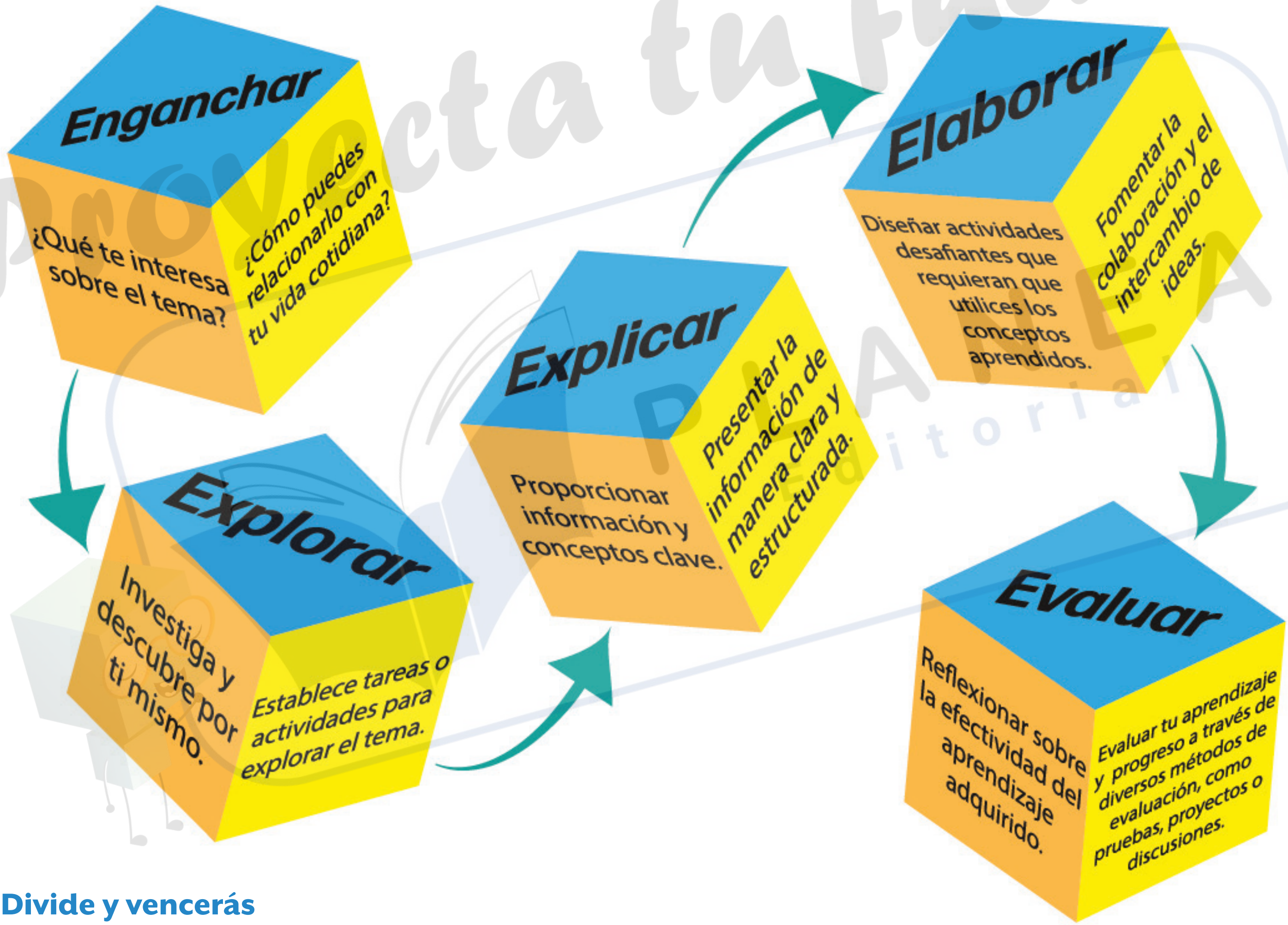
8. Aplica la ecuación general de segundo grado para dos variables considerando la sección cónica según lo requiera, para modelar y dar solución a problemáticas contextualizadas de otras Unidades de Aprendizaje Curricular haciendo uso de herramientas tecnológicas disponibles.

9. Interpreta los fractales como entes matemáticos presentes en la naturaleza, las estructuras sociales y en su entorno, mediante la descripción de su definición y el conocimiento de algunos de los ejemplos más importantes, como el conjunto de Cantor, el Triángulo de Sierpinsky, el Copo de Nieve de Koch, el Conjunto de Mandelbrot, el Conjunto de Julia, el Conejo de Douady y analiza algunas propiedades de estos apoyándose de herramientas tecnológicas disponibles.

Estrategias para trabajo colaborativo

Estrategia 5E

Es una estrategia utilizada en educación para el trabajo colaborativo y diseño de proyectos, consiste en:



Divide y vencerás

Consiste en no ver un proyecto como una unidad, sino como una serie de etapas que pueden desarrollarse de manera individual para después integrar y exponer los hallazgos encontrados, a continuación se muestran los pasos a seguir.

¿El proyecto es lo suficientemente pequeño?

Sí. Desarrollar el proyecto.

No. Dividir el proyecto.

El proyecto se divide en etapas más pequeñas.

Identificar la forma de dividirlo de manera equitativa.

Aplicar la división a cada etapa.

Obtener y almacenar los resultados de cada etapa.

Exponer los hallazgos encontrados.

Proyecta tu futuro
PLANEA editorial
Prohibida su reproducción

Contenido

Unidad de aprendizaje 1. Geometría y trigonometría.

Unidad de aprendizaje 2. Recta, parábola y circunferencia.

Unidad de aprendizaje 3. Ecuaciones generales de las cónicas y fractales.

Proyecta tu futuro PLANEA Editorial Prohibida su reproducción

Unidad de aprendizaje 1
Geometría y trigonometría

Categorías de aprendizaje:

- **C1.** Procedural.

  Subcategorías:
  - ☐ **S1.** Elementos aritmético - algebraicos.
  - ☐ **S2.** Elementos geométricos.

- **C2.** Procesos de intuición y razonamiento.

  Subcategorías:
  - ☐ **S1.** Capacidad para observar y conjeturar.
  - ☐ **S2.** Pensamiento intuitivo.
  - ☐ **S3.** Pensamiento formal.

- **C3.** Solución de problemas y modelación.

  Subcategorías:
  - ☐ **S1.** Uso de modelos.
  - ☐ **S3.** Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios.

Meta de aprendizaje:

- **C1M1.** Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno.
- **C1M2.** Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del pensamiento matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto.
- **C1M3.** Comprueba los procedimientos usados en la resolución de problemas utilizando diversos métodos, empleando recursos tecnológicos o la interacción con sus pares.
- **C2M1.** Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.
- **C2M2.** Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieran explicación o interpretación.

Prohibida su reproducción

- **C2M4.** Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.
- **C3M1.** Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto.
- **C3M3.** Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas.
- **C3M4.** Construye y plantea posibles soluciones a problemas de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno, empleando técnicas y lenguaje matemático.

Aprendizaje de trayectoria:

- Valora la aplicación de procedimientos automáticos y algorítmicos, así como la interpretación de sus resultados para anticipar, encontrar y validar soluciones a problemas matemáticos, de áreas del conocimiento y de su vida personal.
- Adopta procesos de razonamiento matemático tanto intuitivos como formales tales como observar, intuir, conjeturar y argumentar, para relacionar información y obtener conclusiones de problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades y de la vida cotidiana).
- Modela y propone soluciones a problemas tanto teóricos como de su entorno, empleando lenguaje y técnicas matemáticas.
- Explica el planteamiento de posibles soluciones a problemas y la descripción de situaciones en el contexto que les dio origen empleando lenguaje matemático y lo comunica a sus pares para analizar su pertinencia.
- Describe, interpreta y comunica con claridad ideas, situaciones y fenómenos propios de la matemática, de las ciencias naturales, experimentales, de la tecnología, de las ciencias sociales y de su entorno, empleando un lenguaje matemático riguroso.

Progresiones:

1. Resuelve situaciones-problema contextualizadas, a través de la exploración y desarrollo de elementos básicos de la geometría y trigonometría, tales como, ángulos, semejanza, congruencia y autosemejanza, observando la relación entre los lados y ángulos del triángulo rectángulo como razones trigonométricas, destacando la importancia de entes abstractos en la vinculación con otras Unidades de Aprendizaje Curricular, promoviendo el uso de herramientas tecnológicas.

2. Explora algunas leyes y relaciones matemáticas que permitan dar solución a problemas cotidianos a través de la geometría y trigonometría, considera el recíproco del Teorema de Pitágoras, la Ley de Senos, la Ley de Cosenos como una generalización del Teorema de Pitágoras, la circunferencia unitaria, explorando razonamientos y demostraciones sencillas facilitando la formalización de los conceptos.

3. Examina el planteamiento de la Geometría Euclidiana, a través del desarrollo histórico de los postulados de Euclides, particularmente "el quinto postulado de Euclides" y considera escenarios donde no se cumple el mismo, analizando las diferencias entre la Geometría Euclidiana y no Euclidianas considerando ejemplos reales como el modelo terráqueo de la tierra, los viajes aeronáuticos y el estudio de la astronomía, lo cual permita observar cómo estas han sido de utilidad en la solución de problemas reales.

Proyecta tu futuro
PLANEA Editorial
Prohibida su reproducción

Presentación

La primera unidad de aprendizaje de l libro de Temas Selectos de Matemáticas 1, apegado al programa de estudios de la Dirección General de Bachillerato, se abordan las tres primeras progresiones del programa de estudios donde se proponen situaciones contextualizadas sobre los elementos básicos de la geometría y trigonometría, así como, las leyes y relaciones matemáticas sobre estas dos ramas de las matemáticas, finalizando con los elementos de la Geometría Euclidiana. Los contenidos específicos se pueden visualizar en el siguiente esquema.

Proyecta tu futuro
PLANEA Editorial

Unidad de aprendizaje 1. Geometría y trigonometría.

- **Progresión 1**
  Elementos básicos de la geometría y trigonometría.
- **Progresión 2**
  Leyes y relaciones matemáticas.
- **Progresión 3**
  Geometría Euclidiana.

Prohibida su reproducción

Evaluación diagnóstica

En un parque, se construyen dos triángulos con las siguientes características:

- ☐ El primer triángulo tiene lados de 6 cm, 8 cm y 10 cm.
- ☐ El segundo triángulo tiene lados de 10 cm, 8 cm y 6 cm.

1. ¿Los dos triángulos son congruentes?

a) Sí, porque tienen los mismos ángulos.
b) Sí, porque tienen los mismos lados, aunque en diferente orden.
c) No, porque el orden de los lados importa para la congruencia.
d) No, porque no tienen los mismos ángulos.

2. Un poste de 2 m de altura proyecta una sombra de 1.5 m, al mismo tiempo, un árbol proyecta una sombra de 6 m. Si los triángulos formados por los postes y el árbol son semejantes, ¿cuál es la altura del árbol?

a) 3 m **b)** 8 m **c)** 6 m **d)** 8 m

3. Un bombero utiliza una escalera de 10 m apoyada en un edificio. Si el ángulo entre la escalera y el suelo es de 60°, ¿a qué altura del edificio llega la escalera? (Usa sin 60° = $\sqrt{\frac{3}{2}}$)

a) 5 m **b)** $5\sqrt{3}$ m **c)** 8m **d)** $10\sqrt{3}$ m

4. Un triángulo rectángulo tiene un cateto de 8 cm y una hipotenusa de 10 cm. ¿Cuál es la medida del otro cateto?

a) 5 cm **b)** 6 cm **c)** 4 cm **d)** 7 cm

5. Un jardinero necesita cruzar un jardín rectangular de 12 m por 16 m en línea recta. ¿Cuánto mide la diagonal del jardín?

a) 20 m **b)** 25 m **c)** 18 m **d)** 30 m

6. En un triángulo isósceles, los ángulos en la base son iguales. Si uno de los ángulos de la base mide 40°, ¿cuánto mide el ángulo opuesto al vértice?

a) 40° **b)** 80° **c)** 100° **d)** 120°

7. ¿Cuántas diagonales tiene un hexágono?

a) 6 **b)** 9 **c)** 12 **d)** 15

8. En una maqueta, un edificio de 30 m de altura está representado por una figura de 10 cm. ¿Qué altura tendría en la maqueta un árbol de 15 m?

a) 5 cm **b)** 7.5 cm **c)** 10 cm **d)** 15 cm

Proyecta tu futuro
PLANEA Editorial
Prohibida su reproducción

Elementos básicos de la geometría y trigonometría

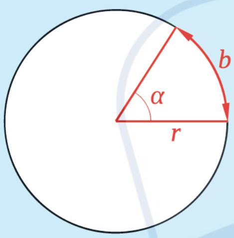
C1 C2 C3 S1 S2 S3 S4 M1 M2 M3 M4

Enganchar 1

Apertura

Glosario

Radian
Unidad de ángulo plano del sistema internacional, equivalente a un ángulo cuyo arco tiene igual longitud que el radio.



Los ángulos y triángulos no son solo conceptos abstractos que se estudian en las aulas; están presentes en numerosos aspectos de la vida diaria, incluso cuando no se es consciente de ello. Desde el diseño arquitectónico de los edificios y puentes, hasta la inclinación de las rampas de acceso o la disposición de los techos.

Por ejemplo, los triángulos son fundamentales en la construcción porque son las formas más estables y resistentes; esto se debe a que la rigidez de sus lados asegura que no se deformen con facildad bajo presión. Es por esta razón que se observan estructuras triangulares en torres de alta tensión, grúas y puentes.

Además, los ángulos están presentes en actividades cotidianas como estacionar un automóvil, cortar un pedazo de pastel en partes iguales, o ajustar la dirección de los rayos de sol con una persiana. La orientación de un panel solar para captar la mayor cantidad de energía también depende de calcular los ángulos en función de la posición del sol.

Como puedes ver tanto los ángulos cómo los triángulos se aplican en diversas actividades que se realizan de forma cotidiana, ahora te pido que describas una manera en la que aplicas los ángulos y triángulos en tu vida diaria.

- **Ángulos:** ____

____

____

Explorar 2

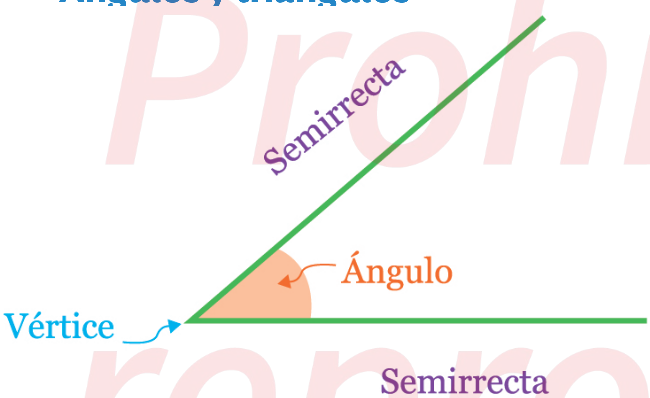
- **Triángulos:** ____

____

Explicar 3

Desarrollo

Ángulos y triángulos



Un ángulo mide la inclinación o separación entre dos semirrectas.

Es momento de comenzar el estudio sobre los ángulos, recordando su concepto y cómo se clasifican.

Un **ángulo** es una figura geométrica formada por dos semirrectas que parten de un punto común llamado vértice. Las semirrectas que forman el ángulo se conocen como lados del ángulo. En términos simples, un ángulo mide la inclinación o separación entre dos semirrectas.

El valor de un ángulo se mide en grados (°) utilizando un instrumento llamado transportador, también existe la medida de los ángulos en radianes. Dependiendo de su medida, los ángulos se clasifican en diferentes tipos.

Prohibida su reproducción

Clasificación de acuerdo a su medida.

1. Ángulo agudo. Mide más de 0° y menos de 90°.

Un ejemplo de ángulo agudo es el formado cuando se abren las hojas de unas tijeras.

2. Ángulo obtuso. Su valor es mayor a 90° pero menor a 180°.

Un ángulo obtuso se observa en la inclinación de una silla reclinable.

3. Ángulo recto. Mide exactamente 90°.

Las esquinas de una hoja de papel o un libro son claros ejemplos de un ángulo recto.

4. Ángulo llano o colineal. Este ángulo mide exactamente 180°.

Una regla completamente extendida forma un ángulo llano.

5. Ángulo cóncavo. Su valor es mayor a 180°, pero menor a 360°.

La abertura superior en una de las caras de la pirámide es un ejemplo de ángulo cóncavo.

6. Ángulo completo. Es aquel que mide exactamente 360°, en otras palabras, una vuelta completa.

Una rueda o cualquier objeto circular son ejemplos de ángulos completos.

Conocer los tipos de ángulos permite analizar y describir muchas formas y estructuras que se presentan a alrededor, facilitando el estudio de la geometría y su aplicación en la vida diaria.

Práctica de aprendizaje

Identifica el tipo de ángulo que se resalta en cada uno de los siguientes objetos.

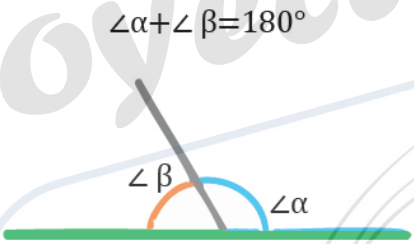
		
		

Proyecta tu futuro
PLANEA Editorial
Prohibida su reproducción

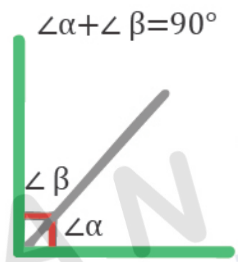
Clasificación de acuerdo a su posición.

Las ángulos también se pueden clasificar de acuerdo a la posición, lo que permite entender sus relaciones y propiedades geométricas.

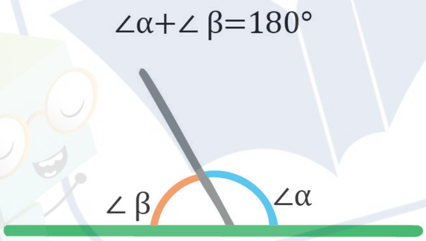
1. **Ángulos adyacentes.** Son ángulos que comparten un lado y un vértice común, pero no se superponen. La suma de los ángulos adyacentes es de 180°.



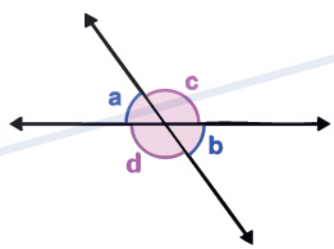
2. **Ángulos complementarios.** Son los ángulos cuya suma es la medida de un ángulo recto (90°).



3. **Ángulos suplementarios.** Son ángulos cuya suma es igual a un ángulo llano o colineal (180°). Pueden ser adyacentes o no.

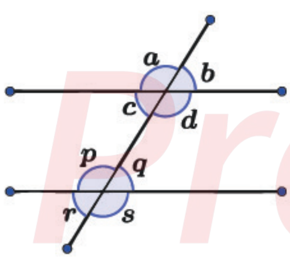


4. **Ángulos opuestos por el vértice.** Son ángulos que se forman cuando dos líneas se cruzan. Estos ángulos tienen la misma medida.



Cuando se cruzan dos líneas, se forman cuatro ángulos, los ángulos a y b son opuestos, de la misma forma que los ángulos c y d, se denotan de la siguiente forma: $\angle a = \angle b$ y $\angle c = \angle d$

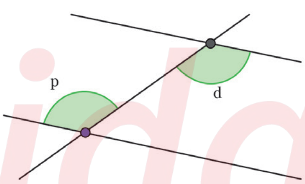
5. **Ángulos correspondientes.** Se forman cuando una línea transversal cruza dos líneas paralelas. Cada par de ángulos que ocupan la misma posición relativa en cada intersección son iguales.



De acuerdo al concepto de ángulos correspondientes, se pueden formar las siguientes relaciones:

$\angle a = \angle p$, $\angle b = \angle q$, $\angle c = \angle r$, $\angle d = \angle s$

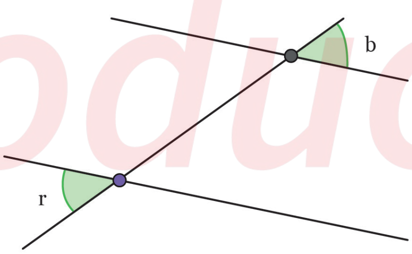
6. **Ángulos alternos internos.** Estos ángulos se forman de la misma manera que los correspondientes, pero se ubican en lados opuestos de la transversal y entre las líneas paralelas.



Los ángulos alternos internos tienen la misma abertura.

$\angle d = \angle p$, porque son alternos internos.

7. **Ángulos alternos externos.** Son similares a las alternos internos con la singularidad de encontrarse por fuera de las líneas paralelas y en lados opuestos de la transversal.

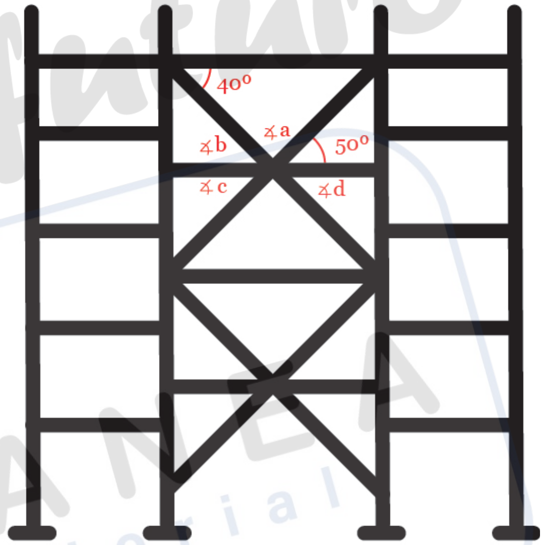


Los ángulos b y r son alternos externo y por lo tanto son iguales, se denota como: $\angle b = \angle r$

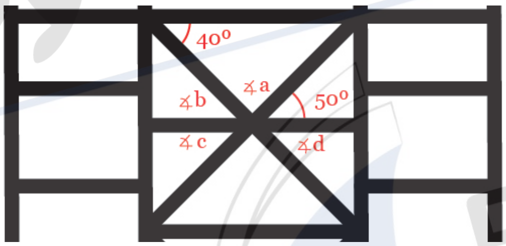
Proyecta tu futuro PLANEA Editorial
Prohibida su reproducción

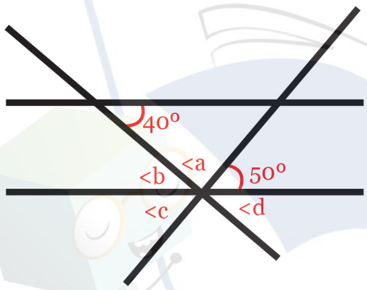
Para comprender cómo se aplica la clasificación de ángulos analiza el siguiente:

> Los andamios son estructuras que se utilizan para realizar trabajos de construcción en zonas altas, el siguiente esquema muestra las medidas de dos ángulos y con esos valores se calculará el valor de los demás ángulos justificando la respuesta.



Para dar solución a este planteamiento es necesario aplicar los conceptos que se explicaron en los párrafos anteriores sobre los ángulos, el primer paso es analizar la ubicación en la que se encuentran los ángulos dados.

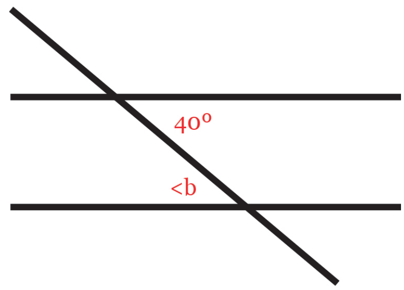




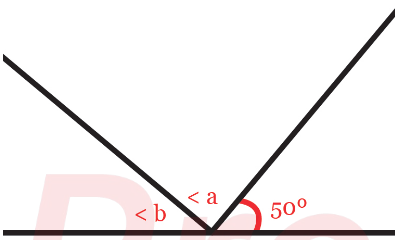
De tal manera que se transforme en un esquema de líneas paralelas cortadas por dos transversales.

La primera conclusión al observar el diagrama es:

$\measuredangle b = 40\,°$ por se alternos internos.



- $\measuredangle a, \measuredangle b$ y $\measuredangle\ 50°$ son adyacentes y su suma es de 180°, por lo que se puede proponer la siguiente fórmula y se encuentra el valor del ángulo a.



$\measuredangle a + \measuredangle b + 50° = 180°$

Cómo el $\measuredangle b = 40°$ se tiene:

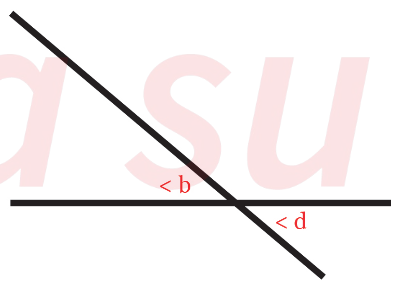
$\measuredangle a + 40° + 50° = 180°$

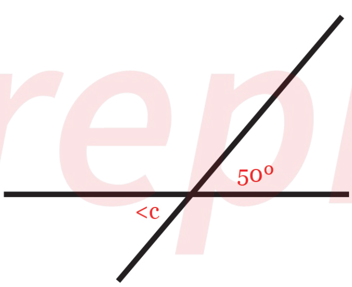
$\measuredangle a = 180° - 40° - 50°$

$\measuredangle a = 90°$

- Los ángulos b y d son iguales al ser opuestos por el vértice.

$\measuredangle b = \measuredangle d \therefore \measuredangle d = 40°$





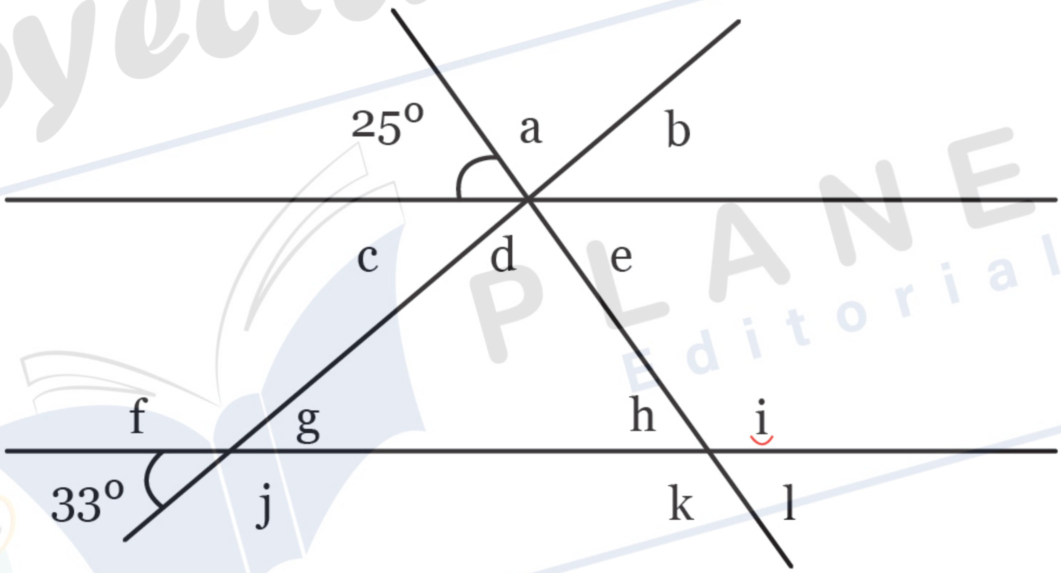
- El ángulo c es igual al ángulo de 50°, también por ser opuestos con el vértice.

$\measuredangle c = 50°$

Proyecta tu futuro
PLANEA Editorial
Prohibida su reproducción

Práctica de aprendizaje No. 2

Analiza la siguiente figura y aplicando los conceptos de ángulos cálcula el valor de los ángulos restantes, justificando la respuesta.



Proyecta tu futuro
PLANEA Editorial
Prohibida su reproducción

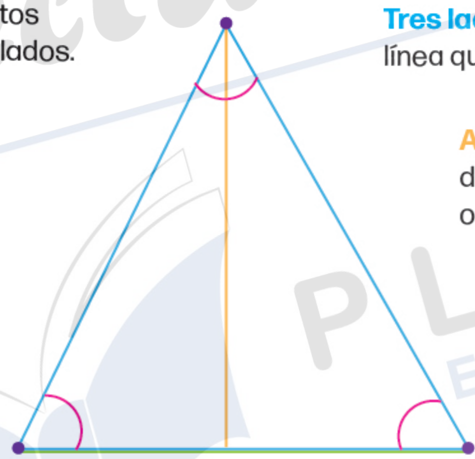
Triángulos

Un **triángulo** es una figura geométrica plana formada por tres lados que se intersecan en tres puntos llamados vértices, delimitando un área en el plano. Es el polígono más simple, ya que tiene el número mínimo de lados y vértices necesarios para formar una figura cerrada.

Características principales de un triángulo

Tres vértices. Puntos donde se unen los lados.

Tres lados. Segmentos de línea que conectan los vértices.



Altura. Distancia perpendicular desde un vértice hasta el lado opuesto o su extensión.

Tres ángulos interiores. La suma de estos siempre es igual a 180°.

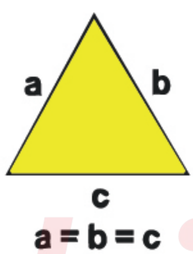
Base. El lado sobre el cual se mide la altura (puede ser cualquiera de los lados, dependiendo de la orientación del triángulo).

Clasificación de los triángulos

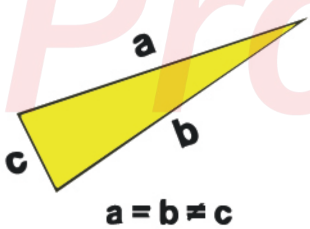
Los triángulos se pueden clasificar de dos maneras: según la longitud de sus lados y según la amplitud de sus ángulos.

Según sus lados:

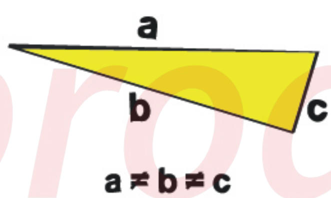
Equilátero. Los tres lados tienen la misma longitud, y sus tres ángulos interiores son iguales (60° cada uno).



Isósceles. Tiene dos lados de igual longitud y el tercer lado diferente. Los ángulos opuestos a los lados iguales también son iguales.

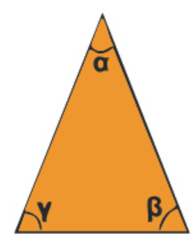


Escaleno. Todos los lados tienen longitudes diferentes, y todos sus ángulos interiores son distintos.

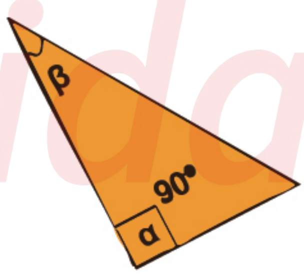


Según sus ángulos:

Acutángulo. Los tres ángulos interiores son agudos (menores de 90°).



Rectángulo. Tiene un ángulo recto (90°). Los lados que forman el ángulo recto se llaman catetos, y el lado opuesto es la hipotenusa.



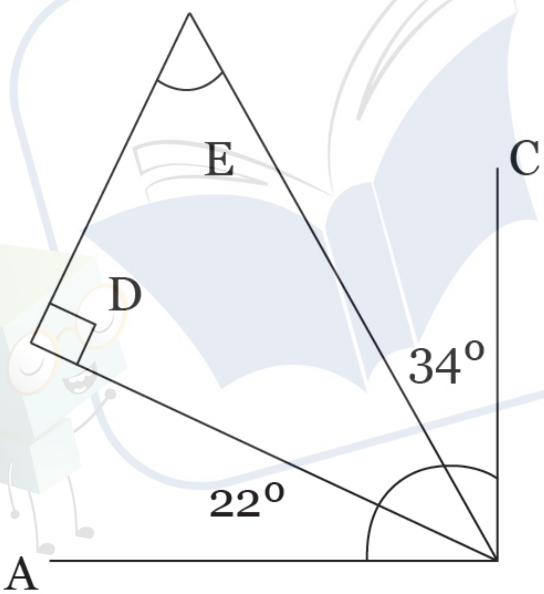
Obtusángulo: Tiene un ángulo obtuso (mayor de 90°) y los otros dos son agudos.

Proyecta tu futuro
PLANEA Editorial
Prohibida su reproducción

Los triángulos tienen aplicación en diversas áreas como: la geometría, la arquitectura, la ingeniería y la física, ya que su estructura simple proporciona estabilidad y permite el cálculo de áreas, distancias y ángulos en problemas complejos. Esta figura básica es clave para el estudio de conceptos más avanzados, como el teorema de Pitágoras y las leyes de senos y cosenos en trigonometría que se abordan en las siguientes progresiones de aprendizaje.

Práctica de aprendizaje No. 3

Aplicando los conceptos de los triángulos y ángulos, analiza la siguiente figura y calcula los ángulos faltantes justificando tu respuesta.



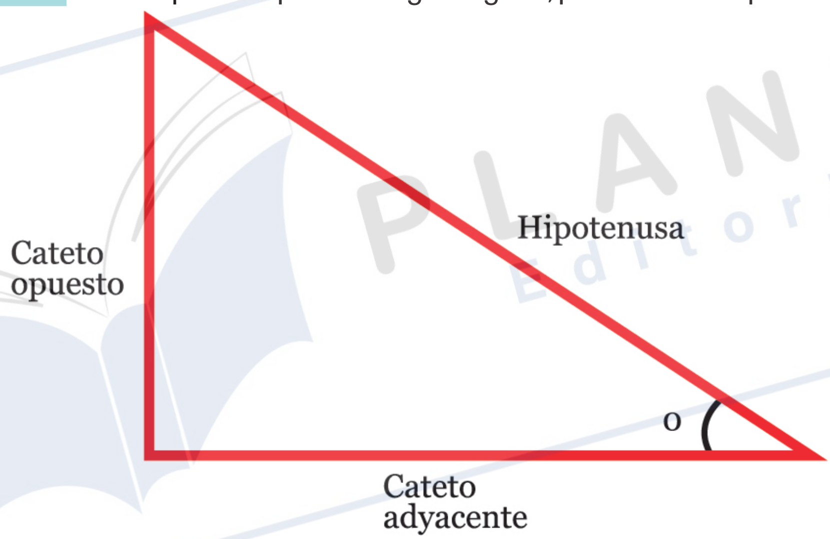
Proyecta tu futuro
PLANEA Editorial
Prohibida su reproducción

Razones trigonométricas

Las **razones trigonométricas** son relaciones matemáticas que se establecen entre los lados de un triángulo rectángulo. Estas razones permiten analizar las proporciones entre los lados del triángulo en función de los ángulos agudos y son fundamentales en la trigonometría.

Recordando que un triángulo rectángulo es aquel que tiene un ángulo recto (90°). Sus lados se denominan:

- **Hipotenusa.** El lado más largo, opuesto al ángulo recto.
- **Cateto opuesto.** El lado que está frente al ángulo agudo que se estudia.
- **Cateto adyacente.** El lado que está junto al ángulo agudo, pero no es la hipotenusa.



Principales razones trigonométricas

En un triángulo rectángulo, las razones trigonométricas más comunes son:

1. **Seno (sen).** *Relación entre el cateto opuesto y la hipotenusa.*

$$sen(\theta)=\frac{Cateto\ opuesto}{Hipotenusa}$$

2. **Coseno (cos)**. *Relación entre el cateto adyacente y la hipotenusa.*

$$cos(\theta)=\frac{Cateto\ adayacente}{Hipotenusa}$$

3. **Tangente (tan)**. *Relación entre el cateto opuesto y el cateto adyacente.*

$$tan(\theta)=\frac{Cateto\ opuesto}{Cateto\ adayacente}$$

Razones trigonométricas recíprocas

Además de las razones principales, existen las razones recíprocas:

1. **Cosecante (csc).** *Recíproco del seno.*

$$csc(\theta)=\frac{Hipotenusa}{Cateto\ opuesto}$$

2. **Secante (sec).** *Recíproco del coseno.*

$$sec(\theta)=\frac{Hipotenusa}{Cateto\ adayacente}$$

3. **Cotangente (cot).** *Recíproco de la tangente.*

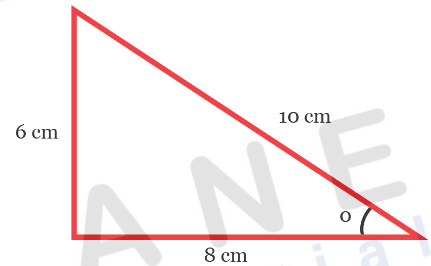
$$cot(\theta)=\frac{Cateto\ adyacente}{Cateto\ opuesto}$$

Proyecta tu futuro
PLANEA Editorial
Prohibida su reproducción

Para calcular las razones trigonométricas de un ángulo en un triángulo rectángulo, se deben seguir estos pasos:

1. **Identificar los lados.** Determina cuál es la hipotenusa, el cateto opuesto y el cateto adyacente respecto al ángulo que se estudia.
2. **Aplicar la fórmula adecuada.** Sustituye las medidas de los lados en las fórmulas correspondientes.
3. **Simplificar.** Si es necesario, realiza divisiones o simplificaciones para expresar la razón en su forma más sencilla.

Para comprender este proceso analiza el siguiente ejemplo:



En un triángulo rectángulo **donde:**

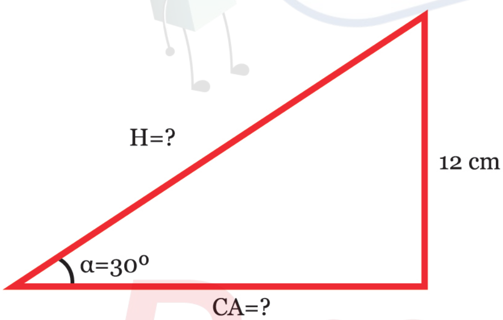
1. *Hipotenusa = 10 cm*
2. *Cateto opuesto = 6 cm*
3. *Cateto adyacente = 8 cm*

Se calculan las razones para el ángulo agudo θ:

$$sen\,(\theta)=\frac{6\ cm}{10\ cm}=\frac{3}{5}=0.6 \qquad cos\,(\theta)=\frac{8\ cm}{10\ cm}=\frac{4}{5}=0.8 \qquad tan\,(\theta)=\frac{6\ cm}{8\ cm}=\frac{3}{4}=0.75$$

Razones trigonométricas recíprocas

$$csc\,(\theta)=\frac{10\ cm}{6\ cm}=\frac{5}{3}=1.\overline{66} \qquad cos\,(\theta)=\frac{10\ cm}{8\ cm}=\frac{5}{4}=1.25 \qquad tan\,(\theta)=\frac{8cm}{6\ cm}=\frac{4}{3}=1.\overline{33}$$



Las razones trigonométricas también se pueden aplicar cuando se conoce el ángulo y uno de los lados para encontrar la medida de los otros dos valores del triángulo rectángulo, observa la siguiente figura.

Para encontrar el valor de la hipotenusa y cateto adyacente del triángulo rectángulo se requiere utilizar las relaciones trigonométricas seno y tangente de la siguiente manera:

$$sen \propto=\frac{12\ cm}{H}\ \text{despejando H, se tiene:}$$

$$H=\frac{12\ cm}{sen \propto}=\frac{12\ cm}{sen\ 30°}=\frac{12\ cm}{0.5}=24cm$$

Glosario

Símbolo **-** Significa que el resultado es un número decimal periódico, es decir, tiene cifras que se repiten infinitamente y no son iguales a cero.

Aplicando la relación tangente se obtiene el valor del cateto adyacente.

$$tan \propto=\frac{12\ cm}{CA}\ \text{despejando CA, se obtiene:}$$

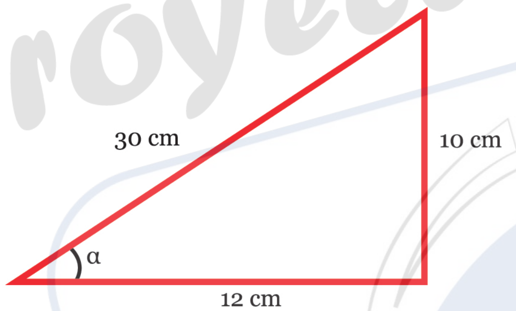
$$CA=\frac{12\ cm}{tan \propto}=\frac{12\ cm}{tan\ 30°}=20.78cm$$

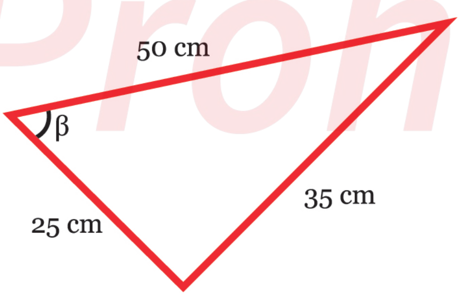
Proyecta tu futuro
PLANEA Editorial
Prohibida su reproducción

Elaborar 4

Práctica de aprendizaje No. 4

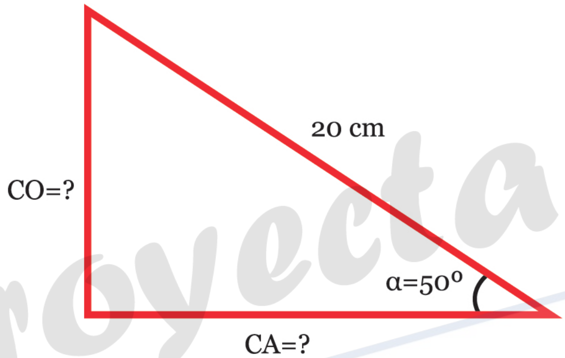
Ejercicio 1. *Calcula las razones trigonométricas principales y recíprocas de los siguientes triángulos rectángulos para el ángulo marcado en cada uno de ellos.*

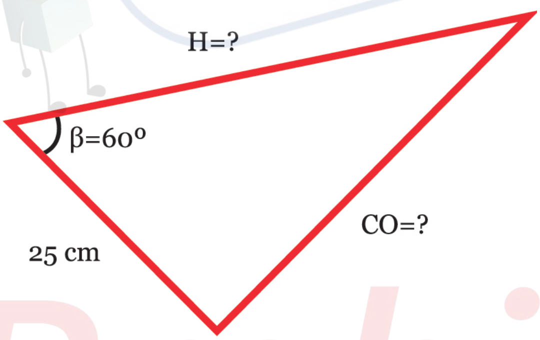




Proyecta tu futuro
PLANEA Editorial
Prohibida su reproducción

Ejercicio 2. *Calcula los lados del triángulo rectángulo de acuerdo con las siguientes imágenes.*





Proyecta tu futuro
PLANEA Editorial
Prohibida su reproducción

Evaluar 5

Cierre

Práctica de aprendizaje No. 5

Resuelve los siguientes planteamientos aplicando los conceptos analizados durante el desarrollo de la presente progresión, junto con sus diagrama que lo ilustre.

1. Un tejado triangular con un ángulo de inclinación de 30° y una base de 8 metros, ¿cuál es la altura y distancia de la inclinación?

2. Una escalera de 5 m de longitud (hipotenusa) forma un ángulo de 60° con el suelo. ¿A qué altura llega la escalera en la pared?, ¿a qué distancia de la base se encuentra separada la escalera?

Proyecta tu futuro
PLANEA Editorial
Prohibida su reproducción

3. Un poste de 8 m de altura proyecta una sombra en el suelo, formando un ángulo de 45° con la línea de visión desde la cima del poste. ¿Cuál es la longitud de la sombra?

Proyecta tu futuro
PLANEA Editorial
Prohibida su reproducción

Estudio independiente

Responde las siguientes preguntas.

1. ¿Cómo puedes identificar si dos figuras son semejantes o congruentes en un problema real?

2. ¿Qué significa que una figura sea autosemejante y dónde lo has visto aplicado?

3. ¿Cómo puedes usar las razones trigonométricas para encontrar un lado o ángulo en un triángulo rectángulo?

4. ¿En qué situaciones reales has usado o podrías usar trigonometría?

5. ¿Por qué es útil trabajar con entes abstractos como puntos, líneas o ángulos en matemáticas?

Proyecta tu futuro
PLANEA Editorial
Prohibida su reproducción

6. ¿Qué herramientas tecnológicas has usado para resolver problemas de geometría o trigonometría y cómo te ayudaron?

Criterios de evaluación	Nivel Básico (1 pt.)	Nivel Intermedio (2 pts.)	Nivel Avanzado (3 pts.)
Aplico conceptos de ángulos, semejanza, congruencia y autosemejanza en situaciones contextualizadas.	Reconozco figuras semejantes o congruentes.	Aplico criterios geométricos para resolver problemas simples.	Analizo y modela situaciones reales usando semejanza, congruencia y autosemejanza con precisión.
Utilizo razones trigonométricas para resolver problemas con triángulos rectángulos.	Uso fórmulas básicas sin justificar.	Aplico razones trigonométricas en problemas conocidos.	Resuelvo problemas complejos usando trigonometría con interpretación contextual y tecnológica.
Reconozco el valor de los entes abstractos y el uso de herramientas tecnológicas en la resolución de problemas geométricos y trigonométricos.	Reconozco que los conceptos abstractos ayudan a resolver.	Uso herramientas tecnológicas básicas para apoyar la resolución.	Integro entes abstractos y herramientas digitales para modelar, resolver y vincular con otras áreas del conocimiento.

Revisa tu desempeño:

9 puntos - Excelente.

De 6 a 8 puntos - Bien.

De 4 a 5 puntos - Suficiente.

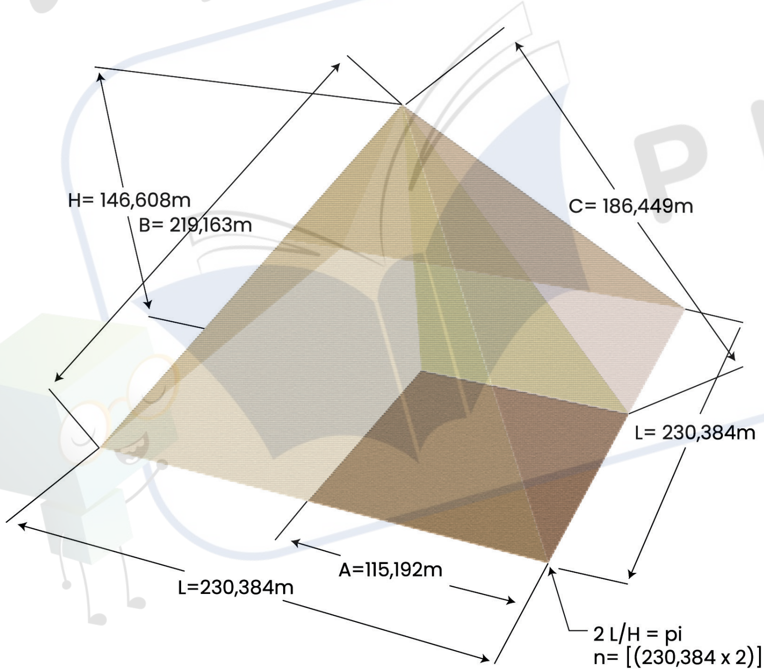
3 puntos - Insuficiente.

Proyecta tu futuro
PLANEA Editorial
Prohibida su reproducción

Una de las civilizaciones que marcaron una época en la historia de la humanidad es la cultura egipcia, la cual se fundó a orillas del río Nilo, el cuál le proporcionaba las condiciones necesarias para producir cosechas abundantes de cebada y lino, asimismo agua en un entorno desértico, transporte y por ende comercio, pero lo que más se reconoce de la cultura egipcia son sus edificaciones, es decir, las pirámides, las cuales simbolizan la grandeza cultural de Egipto.

Las pirámides eran tumbas monumentales diseñadas para preservar y honrar a los faraones en su viaje al mas allá. Según la religión egipcia, el alma del faraón ascendía hacia los dioses a través de estas estructuras, consideradas como un puente hacia la eternidad.

Ahora que se ha recordado a la cultura egipcia se van a analizar sus pirámides desde el punto de vista de la geometría y trigonometría, observa la siguiente imagen.



Si se establece que la cara de uno de los triángulos de la pirámide tiene esos valores, calcula la altura del triángulo y clasifícalo de acuerdo con su lados y ángulos argumentando tu respuesta.

____

____

____

____

____

____

____

Proyecta tu futuro PLANEA Editorial
Prohibida su reproducción

Paec

Leyes y relaciones matemáticas

Enganchar 1

C1 C2 C3 S1 S2 S3 S4 M1 M2 M3 M4

Apertura

Para comenzar con el desarrollo de la progresión es necesario realizar la siguiente pregunta, ¿Alguna vez te has preguntado cómo los principios matemáticos que que aprendes en el aula pueden aplicarse en situaciones reales fuera de ella?

La trigonometría, a menudo percibida como un conjunto de fórmulas abstractas, tiene un papel fundamental en diversas aplicaciones prácticas. Desde la construcción de edificios hasta la navegación satelital, sus principios son esenciales para resolver problemas cotidianos. El *teorema de Pitágoras* no solo se limita a los problemas académicos; su aplicación se extiende a la ingeniería civil al permitir cálculos precisos de distancias y estructuras.

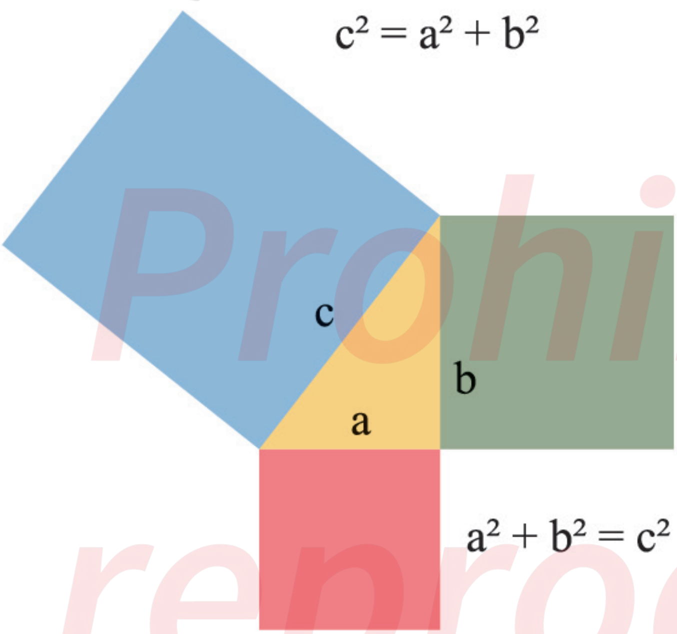
La *ley de senos* y la *ley de cosenos* son herramientas vitales en la navegación y la aviación. Según un estudio publicado por la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), "*la ley de senos permite determinar la posición de un objeto en relación con dos puntos fijos, lo cual es crucial para la navegación marítima*". De igual manera, la ley de cosenos se usa para calcular trayectorias y distancias en el espacio tridimensional, aspecto clave en la ingeniería aeronáutica.

Además, la circunferencia unitaria se utiliza en la representación de las funciones trigonométricas y en la comprensión de fenómenos periódicos, como las ondas sonoras y electromagnéticas. "*El uso de la circunferencia unitaria en la trigonometría facilita la visualización de conceptos abstractos y su aplicación en la resolución de problemas complejos*" (*López, 2019*). Como te has de dar cuenta las matemáticas tienen un sinfín de aplicaciones en la vida cotidiana, que en muchas ocasiones no son percibidas.

2 Explorar

Desarrollo

Teorema de Pitágoras



Representación gráfica del teorema de Pitágoras.

El Teorema de Pitágoras es una de las piedras angulares de la geometría y ha sido una herramienta primordial en el desarrollo de las matemáticas. Este teorema establece que, en un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. Es decir, si un triángulo tiene lados de longitud a, b y una hipotenusa de longitud c, entonces la relación se puede expresar como en el esquema de la izquierda.

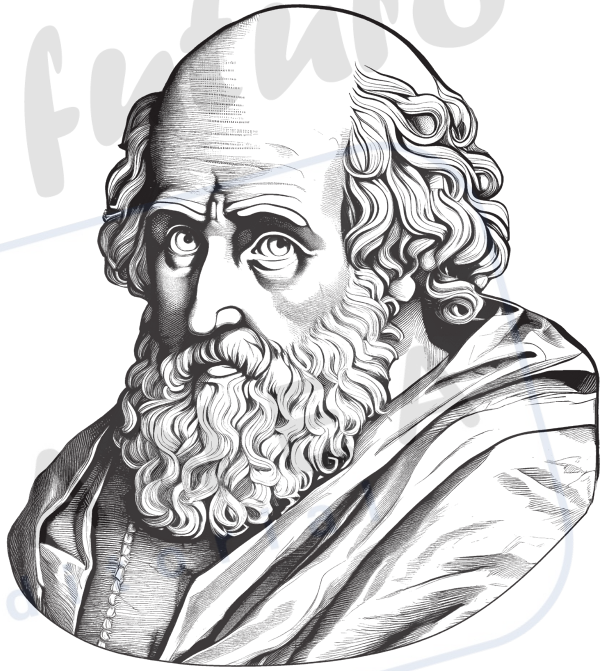
El teorema recibe su nombre de Pitágoras de Samos, un filósofo y matemático griego que vivió en el siglo VI a.C. Aunque la asociación del teorema con Pitágoras es comúnmente aceptada, hay evidencia de que los babilonios y los egipcios ya conocían y aplicaban este principio mucho antes de que Pitágoras lo formalizara.

Pitágoras fundó una escuela en Crotona, donde él y sus seguidores, conocidos como pitagóricos, desarrollaron y difundieron muchas ideas matemáticas y filosóficas. Aunque no se puede afirmar con certeza que Pitágoras mismo descubrió el teorema, la tradición atribuye a su escuela el mérito de haberlo formalizado y probado.

Proyecta tu futuro
PLANEA Editorial
Prohibida su reproducción

El fundamento del Teorema de Pitágoras radica en la relación geométrica entre los lados de un triángulo rectángulo. La demostración del teorema puede realizarse de diversas maneras, algunas de las cuales son:

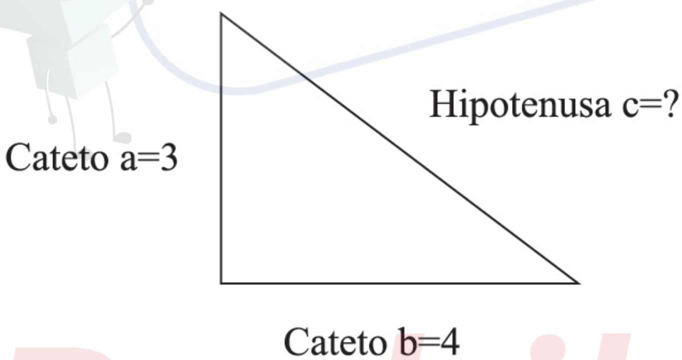
- **Demostración algebraica.** Esta se basa en la comparación de áreas. Se puede construir un cuadrado grande con lado $a + b$ y subdividirlo de diferentes maneras para mostrar que las áreas de los cuadrados sobre los catetos suman la del cuadrado sobre la hipotenusa.
- **Demostración geométrica.** Usando una serie de triángulos semejantes, se puede demostrar que las proporciones entre los lados de los triángulos rectángulos llevan a la relación del teorema.



El teorema de Pitágoras no solo es fundamental en la geometría sino también en numerosas disciplinas como la física, la ingeniería y la astronomía. Permite calcular distancias, diseñar estructuras y comprender la relación entre diferentes magnitudes espaciales.

Ahora que se conoce su historia, fundamento y aplicaciones, es momento de realizar ejemplos de cómo se calcular los lados de un triángulo rectángulo con el teorema de Pitágoras.

Ejemplo 1.



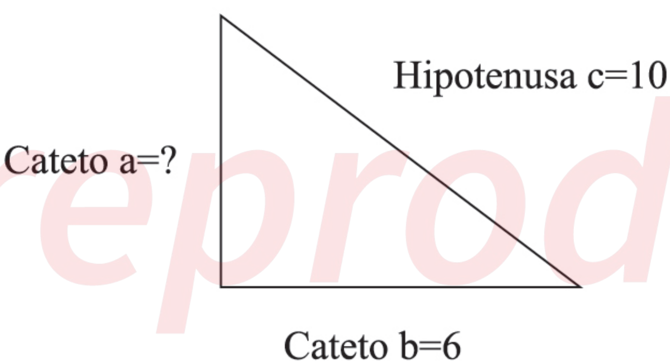
$$c = \sqrt{(3^2 + 4^2)} = \sqrt{(9 + 16)} = \sqrt{25} = 5$$

Cómo Calcular un Cateto

Si se conoce la hipotenusa y un cateto, se despeja la fórmula:

$$a = \sqrt{(c^2 - b^2)} \quad \text{o} \quad B = \sqrt{(c^2 - a^2)}$$

Ejemplo 2.



$$a = \sqrt{(10^2 - 6^2)} = \sqrt{(100 - 16} = \sqrt{64} = 8$$

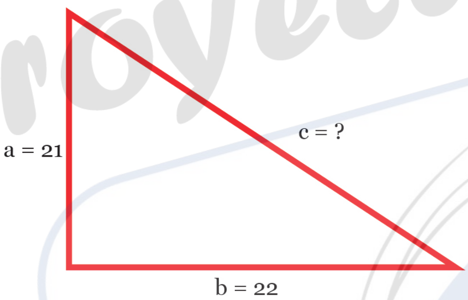
Prohibida su reproducción

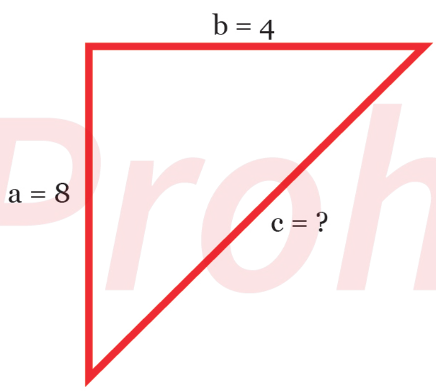
Práctica de aprendizaje No. 6

3 Explicar

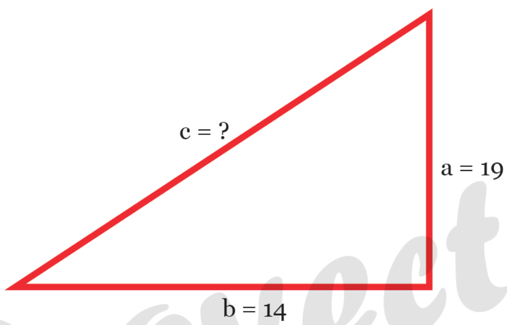
Calcula el lado que se desconoce en cada uno de los triángulos rectángulos.

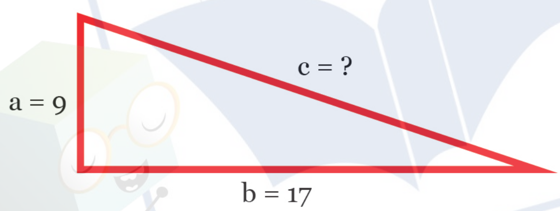
1. Obtén la hipotenusa.

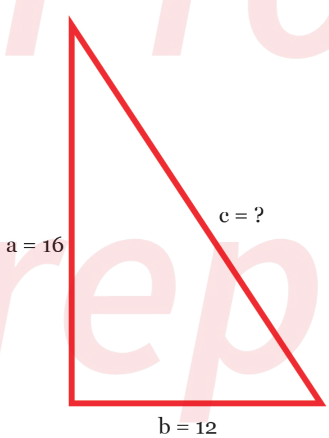




Proyecta tu futuro
PLANEA Editorial
Prohibida su reproducción

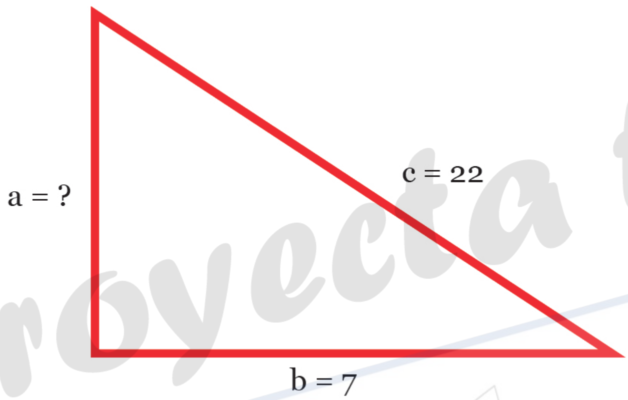


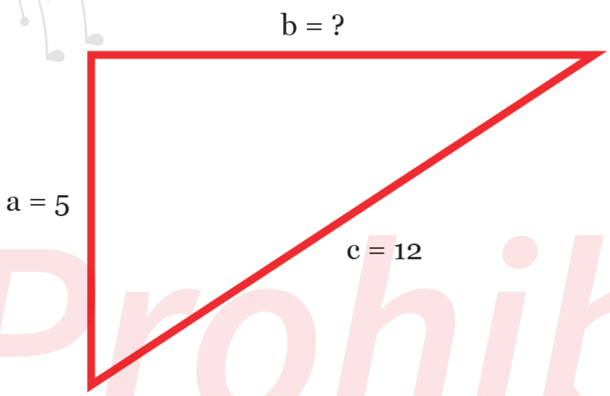




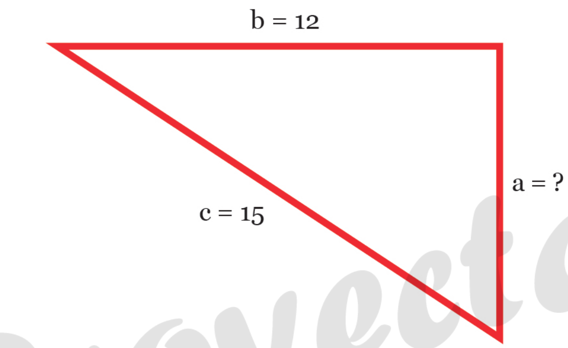
Proyecta tu futuro
PLANEA Editorial
Prohibida su reproducción

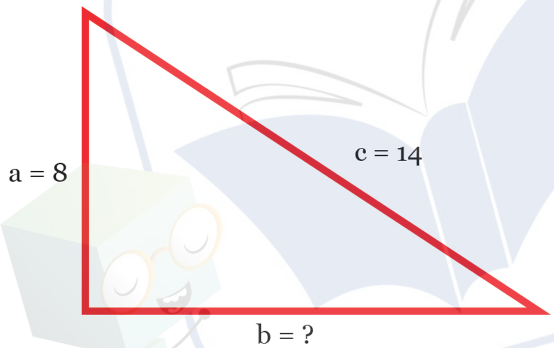
2. Obtén el cateto.

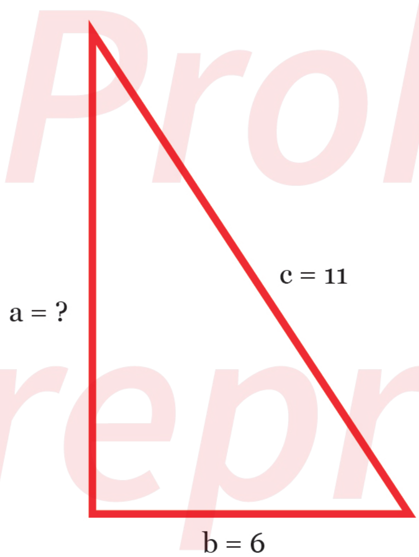




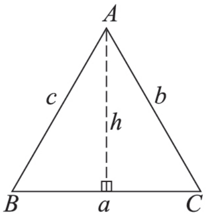
Proyecta tu futuro
PLANEA Editorial
Prohibida su reproducción

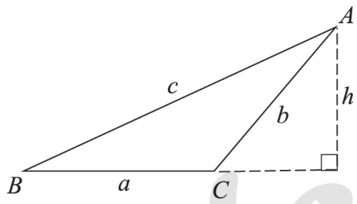






Proyecta tu futuro
PLANEA Editorial
Prohibida su reproducción





Ley de los senos

La ley de los senos es una fórmula que se aplica a los triángulos oblicuángulos, es decir, aquellos que no tienen un ángulo recto. Esta ley establece una relación proporcional entre las longitudes de los lados de un triángulo y los senos de sus ángulos opuestos.

La Ley de los Senos se enuncia de la siguiente manera para un triángulo con lados a, b y c, opuestos a los ángulos A, B y C respectivamente.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

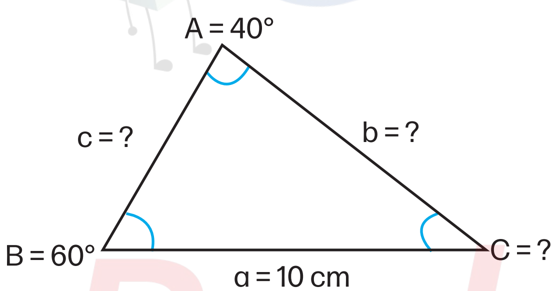
Esto significa que cada lado de un triángulo es proporcional al seno de su ángulo opuesto, lo cual permite resolver triángulos oblicuángulos con la información disponible de ángulos y lados conocidos.

El fundamento de la ley de los senos se puede derivar usando las propiedades geométricas de los triángulos. Una de las demostraciones más comunes implica trazar una altura desde uno de los vértices del triángulo hasta su lado opuesto, dividiendo el triángulo en dos triángulos rectángulos. Utilizando las definiciones de las funciones trigonométricas en estos triángulos rectángulos, se puede establecer la relación proporcional mencionada.

La ley de los senos es útil en situaciones donde se conoce suficiente información sobre un triángulo (como dos ángulos y un lado, o dos lados y un ángulo opuesto) para determinar las longitudes de los lados o las medidas de los ángulos restantes. Algunas aplicaciones prácticas incluyen:

- Navegación. Determinación de posiciones en mapas y cálculos de rutas.
- Astronomía. Cálculo de distancias entre cuerpos celestes.
- Ingeniería. Análisis estructural y diseño.

Es momento se conocer cómo se aplica la fórmula de la ley de los senos, analiza el siguiente ejemplo:



Se tiene un triángulo ABC, A = 40°, B = 60° y el lado a = 10 cm, ¿Cuánto mide cada uno de sus lados del triángulo?

Solución:

1. Determinar el tercer ángulo: en un triángulo, la suma de sus ángulos internos siempre es igual a 180 grados, por lo cual:

   $C = 180° - A - B = 180° - 40° - 60° = 80°$

2. Aplicar la ley de los senos:

   $$\frac{10\ cm}{\sin 40°} = \frac{b}{\sin 60°} = \frac{c}{\sin 80°}$$

3. Calcular b:

   $$\frac{10\ cm \times \sin 60°}{\sin 40°} = \frac{10\ cm \times 0.86}{0.64} = 13.43\ cm$$

4. Calcular c:

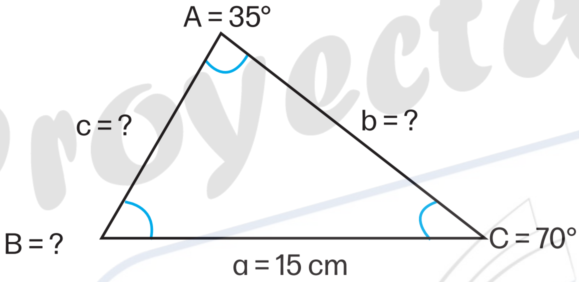
   $$\frac{10\ cm \times \sin 80°}{\sin 40°} = \frac{10\ cm \times 0.98}{0.64} = 15.31\ cm$$

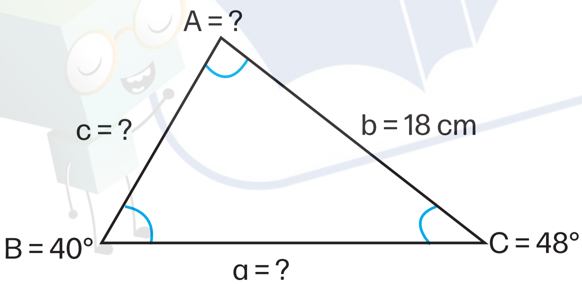
Los lados del triángulo son a = 10 cm, b = 13.43 cm y c = 15.31cm.

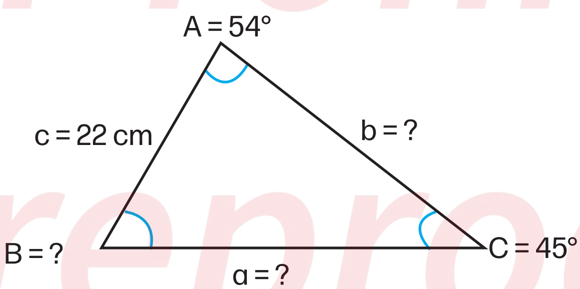
Prohibida su reproducción

Práctica de aprendizaje No. 7

Calcula los lados de los siguientes triángulos aplicando la ley de los senos.







Proyecta tu futuro
PLANEA Editorial
Prohibida su reproducción

Ley de los cosenos

La ley de los cosenos es una fórmula que extiende el teorema de Pitágoras a triángulos que no son rectángulos y se emplea para calcular las longitudes de los lados o las medidas de los ángulos en cualquier tipo de triángulo.

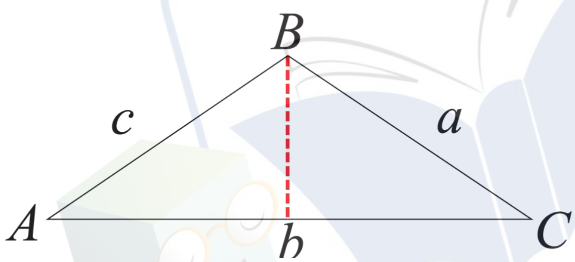
La ley de los cosenos se enuncia de la siguiente manera para un triángulo con lados a, b y c, opuestos a los ángulos A, B y C respectivamente:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(C)$$

De manera similar, se puede escribir las fórmulas para los otros dos lados:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(A)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(B)$$

Estas fórmulas permiten calcular la longitud de un lado cuando se conocen las longitudes de los otros dos lados y la medida del ángulo entre ellos, o para calcular la medida de un ángulo cuando se conocen las longitudes de los tres lados del triángulo.

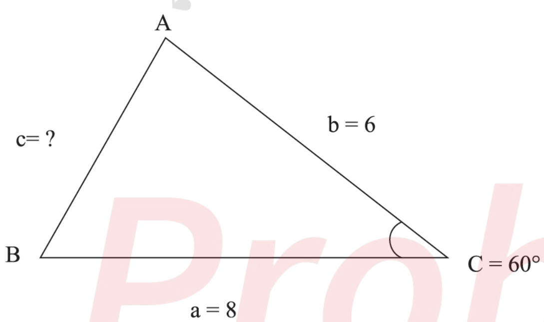


Fundamento de la ley de los cosenos al formar dos triángulos rectángulos al dividir el triángulo oblicuángulo.

El fundamento de la ley de los cosenos puede derivarse del teorema de Pitágoras aplicando propiedades geométricas adicionales. Se considera un triángulo oblicuángulo y se traza una altura desde un vértice hasta el lado opuesto, dividiendo el triángulo en dos triángulos rectángulos. Utilizando las definiciones de las funciones trigonométricas y el teorema de Pitágoras en estos triángulos rectángulos, se deduce la relación entre los lados y los ángulos del triángulo oblicuángulo.

Ahora analiza el siguiente ejemplo para aplicar la fórmula de la ley de los cosenos.

Se tiene un triángulo ABC, donde el lado a = 8 cm, el lado b = 6 cm y C = 60°, ¿cuál es el valor del lado c?



Al aplicar la ley de los cosenos se obtiene:

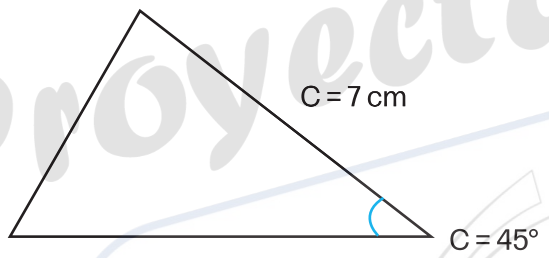
$$c^2 = 8^2 + 6^2 - 2(8)(6)\cos 60°$$
$$c^2 = 64 + 36 - 2(8)(6)(0.5)$$
$$c^2 = 64 + 36 - 48 = 52$$
$$c = \sqrt{52} = 7.21 \text{ cm}$$

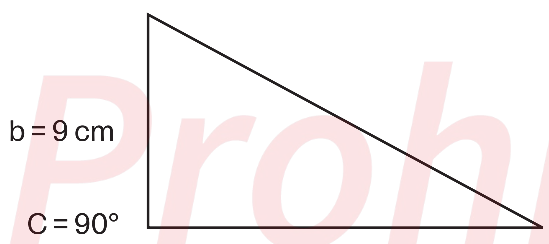
El lado c del triángulo tiene una longitud de 7.21 cm

Proyecta tu futuro
PLANEA Editorial
Prohibida su reproducción

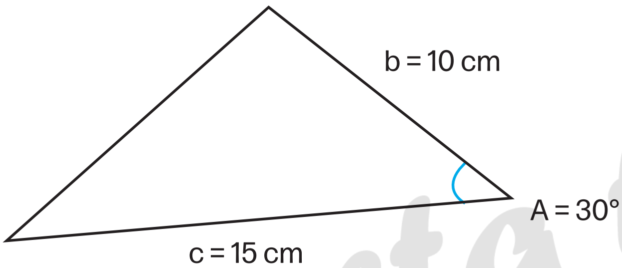
Práctica de aprendizaje No. 8

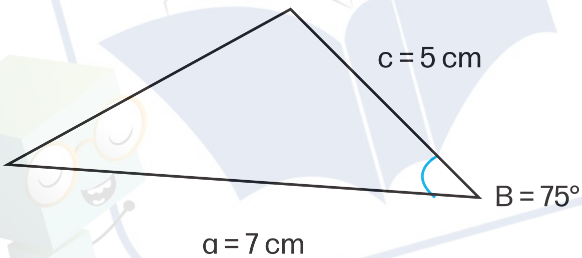
Aplicando la ley de los cosenos calcula el lado de longitud desconocida en los siguientes triángulos.

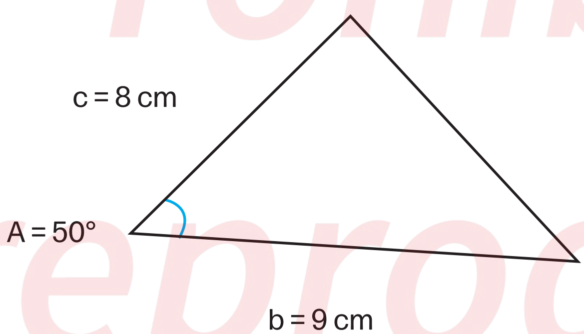




Proyecta tu futuro
PLANEA Editorial
Prohibida su reproducción







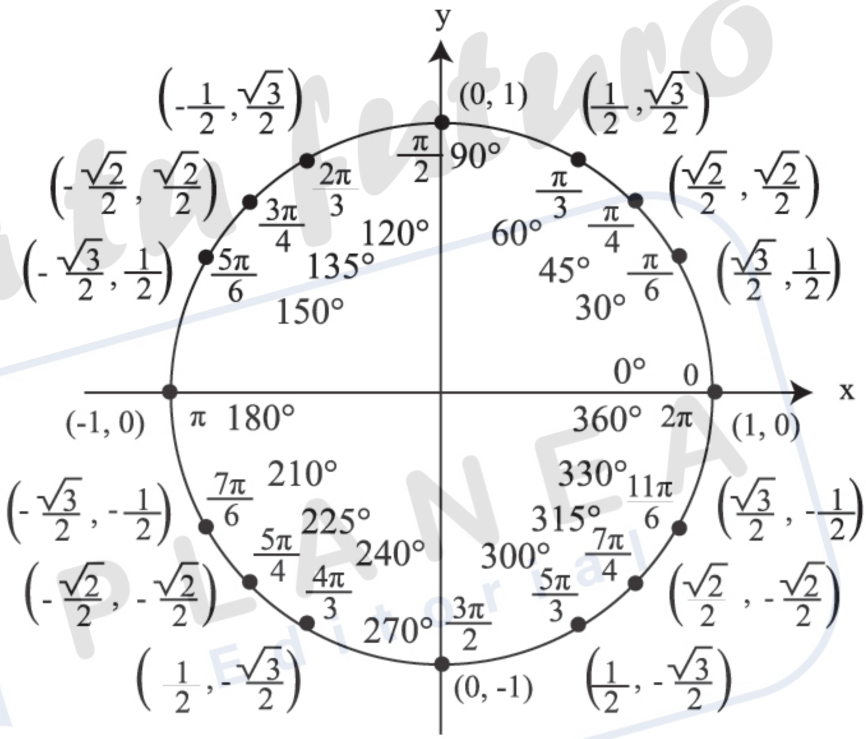
Proyecta tu futuro
PLANEA Editorial
Prohibida su reproducción

Elaborar 4

Circunferencia unitaria

La **circunferencia unitaria** es una herramienta fundamental en el estudio de las funciones trigonométricas, ya que proporciona una manera visual e intuitiva de comprender la relación entre los ángulos y las longitudes de los lados en un triángulo. La circunferencia unitaria es un círculo con radio igual a uno, centrado en el origen del plano cartesiano.

Para comprender cómo se utilizan las funciones trigonométricas en la circunferencia unitaria, se debe considerar un ángulo θ formado por un rayo que parte del origen y una línea que se extiende a lo largo del eje positivo X. Este ángulo puede ser positivo (girando en sentido contrario a las agujas del reloj) o negativo (girando en sentido de las agujas del reloj).



Circunferencia unitaria con los valores de las funciones coseno y seno para cada uno de los ángulos.

Los puntos en la circunferencia unitaria están definidos por coordenadas (X, Y), donde $X = \cos(\theta)$ y $Y = \sin(\theta)$. Estas coordenadas representan el coseno y el seno del ángulo θ, respectivamente. De esta manera, se puede visualizar las funciones trigonométricas como proyecciones en el eje X y el eje Y de la circunferencia unitaria.

Las aplicaciones que tiene la circunferencia unitaria son:

1. **Visualización de funciones trigonométricas.** *Permite visualizar cómo varían las funciones coseno y seno conforme cambia el ángulo θ. Esto es útil para entender las propiedades de periodicidad y simetría de estas funciones.*

2. **Determinación de valores exactos.** *Al utilizar la circunferencia unitaria, es posible determinar valores exactos de las funciones trigonométricas para ángulos comunes, como 0°, 30°, 45°, 60° y 90°. Por ejemplo, para* $\theta = 45°$ *o* $\theta = \frac{\pi}{4}$ *radianes, se tiene que* $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *y* $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. **Comprensión de identidades trigonométricas.** *La circunferencia unitaria facilita la comprensión y demostración de identidades trigonométricas importantes, como las identidades de ángulos complementarios, las identidades de suma y diferencia de ángulos, y las identidades de doble ángulo.*

Prohibida su reproducción

Cierre

5 Evaluar

Práctica de aprendizaje No. 9

Es momento de integral los conocimientos en binas resuelvan los siguientes planteamientos aplicando los conocimientos y habilidades desarrolladas durante este tema.

1. Un ingeniero está diseñando una estructura triangular y necesita determinar la longitud de uno de los lados del triángulo y el área de la estructura. Los lados conocidos del triángulo miden 7 metros y 10 metros, con un ángulo incluido de 45°.

2. Una torre de comunicaciones se coloca a una distancia de 20 metros de un punto A y 25 metros de un punto B. La distancia entre los puntos A y B es de 30 metros. Encuentra la altura de la torre.

Proyecta tu futuro
PLANEA Editorial
Prohibida su reproducción

Estudio independiente

Responde las siguientes preguntas.

1. ¿Cómo puedes saber si un triángulo es rectángulo usando el recíproco del Teorema de Pitágoras?

2. ¿Cuándo se usa la Ley de Senos o la Ley de Cosenos para resolver un triángulo?

3. ¿Qué representa la circunferencia unitaria en trigonometría?

4. ¿Cómo puedes usar la circunferencia unitaria para resolver problemas trigonométricos?

5. ¿Por qué es útil demostrar una fórmula como la Ley de Cosenos?

Proyecta tu futuro
PLANEA Editorial
Prohibida su reproducción

6. ¿Cómo puedes explicar con tus palabras una relación trigonométrica como el seno de un ángulo?

Criterios de evaluación	Nivel Básico (1 pt.)	Nivel Intermedio (2 pts.)	Nivel Avanzado (3 pts.)
Reconozco y aplica leyes matemáticas como el recíproco del Teorema de Pitágoras, Ley de Senos y Ley de Cosenos.	Identifico las leyes sin aplicarlas correctamente.	Aplico las leyes en problemas conocidos.	Utilizo las leyes con precisión en problemas diversos, justificando su uso según el tipo de triángulo.
Exploro la circunferencia unitaria como herramienta para representar razones trigonométricas.	Reconozco la circunferencia unitaria como un círculo.	Relaciono ángulos con coordenadas en la circunferencia.	Uso la circunferencia unitaria para representar funciones trigonométricas y resolver problemas contextualizados.
Desarrollo razonamientos y demostraciones sencillas que faciliten la formalización de conceptos geométricos y trigonométricos.	Repito fórmulas sin explicación.	Explico con ejemplos simples el significado de relaciones trigonométricas.	Argumento y demuestra relaciones geométricas y trigonométricas, conectando ideas y conceptos con claridad.

Revisa tu desempeño:

9 puntos - Excelente.

De 6 a 8 puntos - Bien.

De 4 a 5 puntos - Suficiente.

3 puntos - Insuficiente.

Proyecta tu futuro
PLANEA Editorial
Prohibida su reproducción

Geometría Euclidiana

Enganchar 1

Apertura

La geometría Euclidiana, bautizada en honor al matemático griego Euclides, constituye la base de la geometría tradicional que se estudia en la educación básica. Se fundamenta en una colección de axiomas y postulados, entre ellos el postulado de las paralelas, el cual sostiene que por un punto exterior a una recta dada, solo puede trazarse una paralela a dicha recta.

Euclides, quien vivió alrededor del año 300 a.C., recopiló su conocimiento en la obra “Elementos”, que se consolidó como uno de los textos más influyentes en la historia de la matemática. En esta obra, Euclides formuló cinco postulados fundamentales, sentando las bases para toda la geometría posterior. Su obra no solo influenció el desarrollo matemático, sino que también permeó áreas como la física y la ingeniería, estableciendo principios que, hasta la fecha, son aplicados y estudiados.

Explorar 2

¿Cómo crees que los axiomas y postulados de Euclides han influenciado la comprensión moderna del espacio y las formas geométricas?, escribe tu respuesta en las siguientes líneas y comparte con tus compañeros de clase.

____

____

____

____

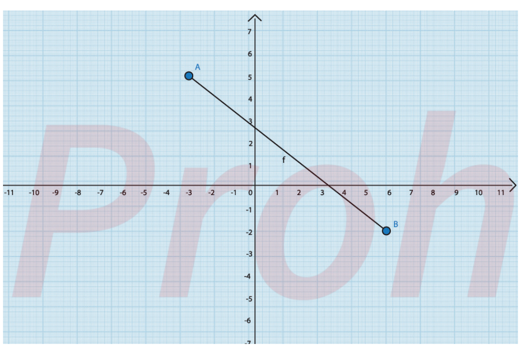
____

Desarrollo

Explicar 3

Postulados

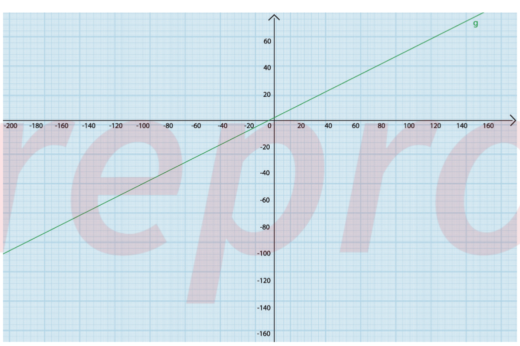
Como se mencionó en párrafos anteriores, la geometría Euclidiana se basa en 5 postulados que a continuación se describen.



Primer postulado

“Se puede trazar una línea recta desde cualquier punto a cualquier otro punto.”

Si tienes dos puntos A y B en una hoja de papel, siempre puedes dibujar una línea recta que los conecte de forma directa.

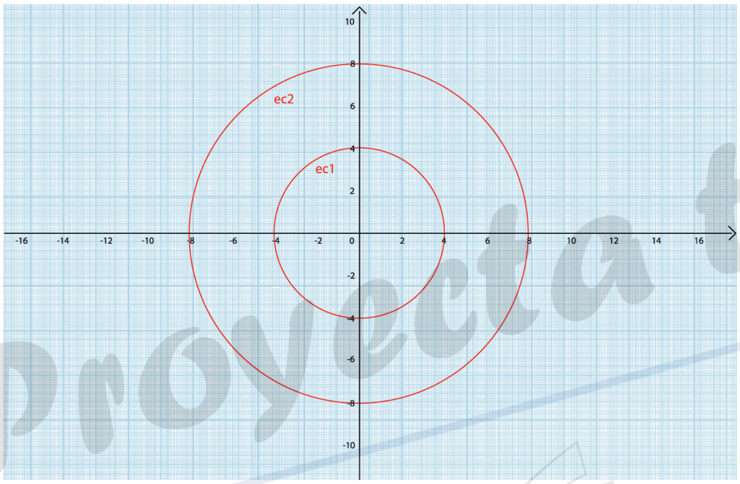


Segundo postulado

“Se puede prolongar una línea recta de manera indefinida en cualquier dirección.”

Imagina una línea recta trazada en tu cuaderno. Según este postulado, podrías extender esa línea tanto como quieras, en ambas direcciones.

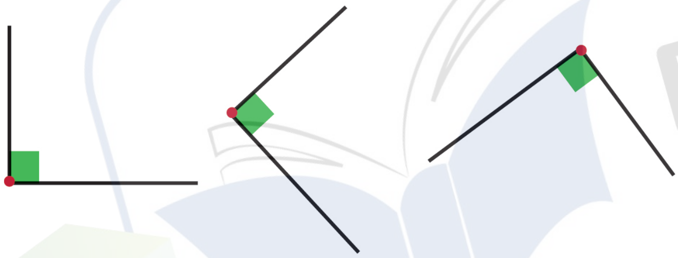
Proyecta tu futuro
PLANEA Editorial
Prohibida su reproducción



Tercer postulado

"Se puede dibujar un círculo con cualquier centro y cualquier radio."

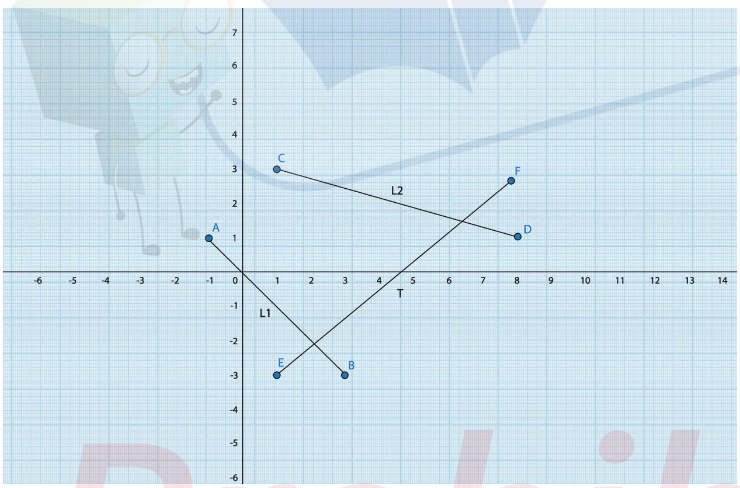
Si colocas un compás con la punta en el centro de una hoja y ajustas la otra punta a cierta distancia (radio), puedes trazar un círculo perfecto alrededor del punto central.



Cuarto postulado

"Todos los ángulos rectos son iguales entre sí."

Los ángulos de 90 grados en una esquina de un libro, en una esquina de una habitación, o en cualquier lugar, siempre son iguales.



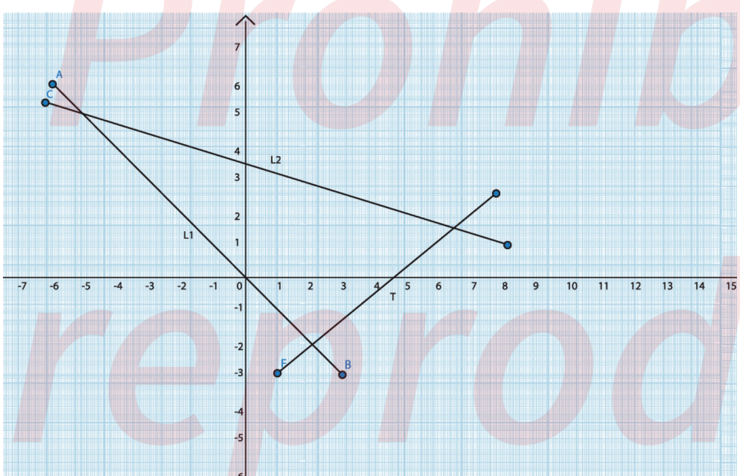
Quinto postulado (postulado de las paralelas)

"Si una línea recta que corta a otras dos líneas produce ángulos interiores en el mismo lado que suman menos de dos ángulos rectos, entonces esas dos líneas, si se prolongan indefinidamente, se encontrarán en ese lado."

Imagina que tienes dos líneas rectas (L1 y L2) y una tercera línea (T) que las corta. Los ángulos formados en un lado de la línea T, donde esta cruza las líneas L1 y L2, son llamados ángulos interiores. Si la suma de estos ángulos interiores es menor a 180 grados

De acuerdo con el quinto postulado, las líneas L1 y L2 se encontrarán si se prolongan indefinidamente hacia ese lado.

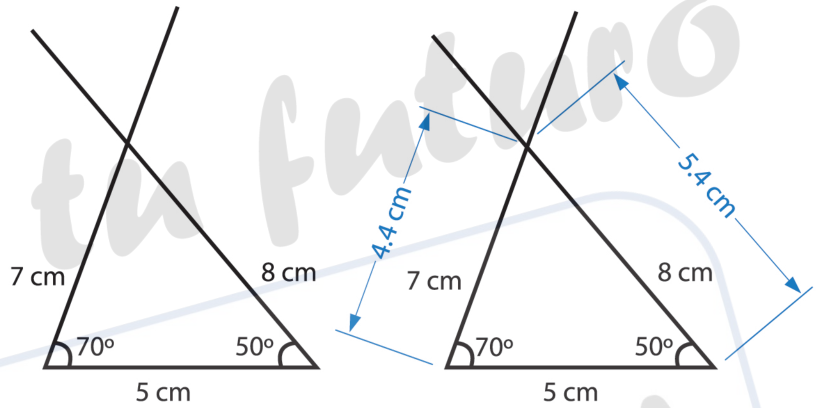
Como puedes observar si los ángulos interiores son menores a 180°, las líneas se encuentran en un punto.



Proyecta tu futuro
PLANEA Editorial
Prohibida su reproducción

Para comprender cómo se aplica este postulado es necesario aplicar los conocimientos de la progresión pasada. Analiza el siguiente ejemplo:

Se tiene una recta de 5 cm de longitud en posición horizontal y por los extremos la cortan dos rectas de 7 y 8 cm de longitud, que forman ángulos de 70° y 50° respectivamente, ¿a qué distancia se cortan las líneas para formar un triángulo?



Para darle solución se puede realizar de forma gráfica con ayuda de la regla y transportador para realizar el trazo y medir las distancias. Tal como se observa en las imágenes de la izquierda.

La distancia que corta la recta de 7 cm es a 4.4 cm de longitud, mientras que la de 8 cm corta a una distancia de 5.2 cm.

Pero también se puede realizar de manera analítica la comprobación de los lados del triángulo que se forma, ya que se conoce el valor de un lado del triángulo y dos ángulos por lo que se puede utilizar la ley de los senos para conocer el valor de los otros lados del triángulo.

Si el lado de 5 cm es el valor del lado a y B = 70° y C=50°, la ley de los senos queda:

$$A = 180° - 70° - 50° = 60°$$

$$\frac{50\ cm}{\sin 60°} = \frac{b}{\sin 70°} = \frac{c}{\sin 50°}$$

$$b = \frac{\sin 70° \times 5\ cm}{\sin 60°} = 5.42\ cm$$

$$c = \frac{\sin 50° \times 5\ cm}{\sin 60°} = 4.42\ cm$$

Cómo te puedes dar cuenta los valores analíticos son más exactos, sin embargo, se puede utilizar ambo métodos para comprobar el quinto postulado de Euclides.

Proyecto tu futuro
PLANEA Editorial
Prohibida su reproducción

Práctica de aprendizaje No. 10

4 Elaborar

Es momento de comprobar el quinto postulado de Euclides, realiza el trazo y cálculo de cada uno de los siguientes planteamientos:

1. Se tiene una recta de 8 cm de longitud en posición horizontal y por los extremos la cortan dos rectas de 6 y 9 cm de longitud, que forman ángulos de 45° y 30° respectivamente, ¿a qué distancia se cortan las líneas para formar un triángulo?

Proyecta tu futuro
PLANEA Editorial
Prohibida su reproducción

2. Una recta vertical de 8 cm a la cual cortan dos recta de 9 y 10 cm respectivamente con ángulos de 60° y 40°, ¿a qué distancia se cortan las líneas para formar un triángulo?

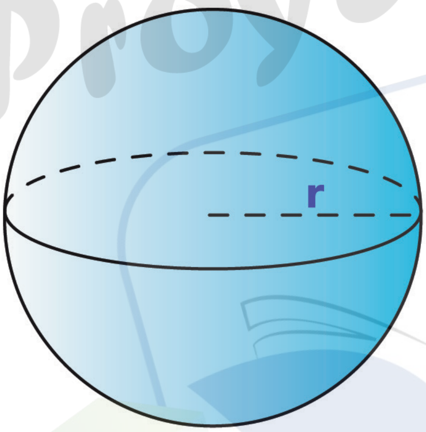
Proyecta tu futuro
PLANEA Editorial
Prohibida su reproducción

Geometría esférica

La geometría esférica es una rama de la geometría que se ocupa de las figuras situadas en la superficie de una esfera. A diferencia de la geometría euclidiana, que estudia figuras planas, la geometría esférica se centra en las propiedades y relaciones de figuras tridimensionales. Este tipo de geometría es fundamental para diversas aplicaciones prácticas, en especial los campos de la astronomía, la cartografía y la navegación.

Conceptos básicos de la geometría esférica

En los siguientes párrafos se definen los conceptos básicos aplicados a la geometría esférica.



En la imagen se representa la superficie esférica y radio de la espera.

1. **Superficie esférica.** Una esfera es una superficie tridimensional donde todos los puntos están a la misma distancia de un punto central llamado centro de la esfera. La distancia desde el centro hasta cualquier punto en la superficie es el radio de la esfera.

   Para calcular la superficie de la esfera se utiliza la siguiente fórmula:

$$A = 4\pi r^2$$

Donde:

A es la superficie esférica.

r es el radio de la esfera.

π es la constante matemática igual a 3.14159..., para fines prácticos 3.1416.

Para conocer cómo se aplica esta fórmula, se plantea lo siguiente:

Una esfera tiene un radio de 7 unidades, ¿cuál es su superficie?

El primer paso es obtener los datos.

$r = 7$ unidades.

$\pi = 3.1416$ redondeado para fines prácticos.

$A = ?$

Ahora se escribe la fórmula y se sustituyen los datos:

$A = 4\pi r^2$

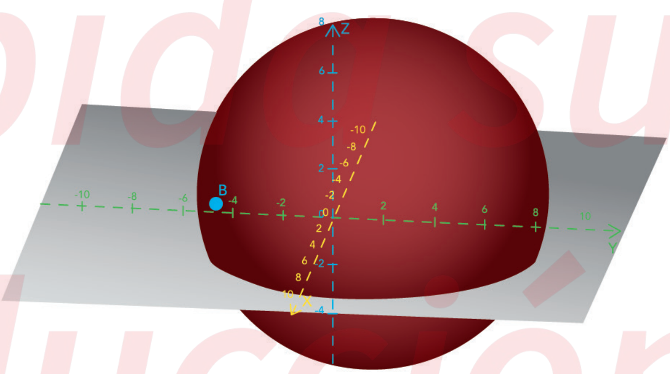
$A = 4 \times 3.1416 \times (7\ u)^2 = 615.7536\ u^2$

El resultado es 615.7536 unidades cuadradas.

2. **Círculo máximo.** En una esfera, un círculo máximo es el equivalente tridimensional de una línea recta en un plano euclidiano. Es el mayor círculo que se puede trazar en una esfera y su circunferencia pasa por el centro de la esfera. Los círculos máximos son fundamentales para medir distancias en la superficie esférica.

   Para calcular la longitud de la circunferencia de un círculo máximo en una esfera, se utiliza la fórmula de circunferencia igual a:

$$C = 2\pi r$$



Esfera de 7 unidades de radio ubicada en el punto (3,2,2) del plano tridimensional (x,y,z).

Proyecta tu futuro
PLANEA Editorial
Prohibida su reproducción

Donde:

C es la longitud de la circunferencia.

r es el radio de la esfera.

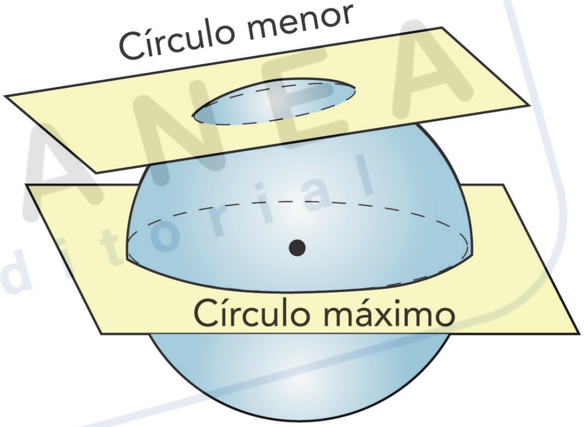
π es la constante matemática.

Para calcular la circunferencia del círculo máximo de la esfera de 7 unidades de radio, sería:

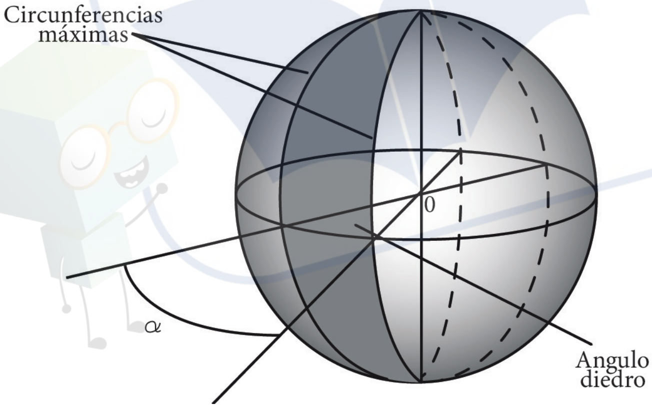
$$C = 2\pi r = 2 \times 3.1416 \times 7 \text{ u} = 43.9824 \text{ u}$$

La circunferencia del círculo máximo de la esfera de radio de 7 unidades es de: 43.9824 unidades.

3. Círculo menor. Es un círculo en la superficie de una esfera que no pasa por el centro de la esfera. En otras palabras, es un círculo cuya circunferencia es menor que la del círculo máximo.



Representación del círculo máximo y menor de la esfera.

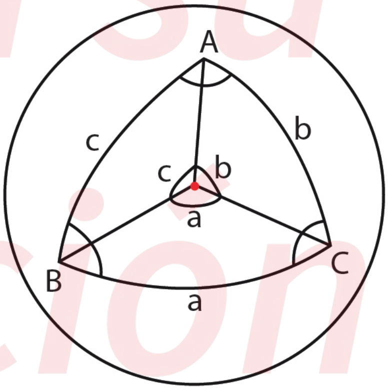


4. Ángulos esféricos. En la geometría esférica, los ángulos se miden por la cantidad de giro de una línea en la superficie de la esfera. Los ángulos esféricos se forman por la intersección de dos círculos máximos y son necesarios para entender las figuras esféricas.

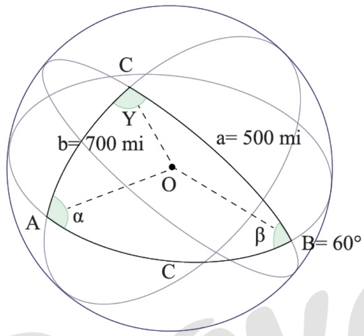
Ángulo esféricos formados por el cruce de dos círculos máximos. Un ángulo diedro es el ángulo formado por la intersección de dos planos que se cortan y que intersecan la superficie de una esfera, creando dos círculos máximos. El ángulo diedro se mide como el ángulo entre estos dos planos en el punto de intersección de los círculos máximos en la superficie de la esfera.

5. Triángulos esféricos. Un triángulo esférico se forma por la intersección de tres círculos máximos. A diferencia de los triángulos planos, los triángulos esféricos tienen ángulos internos que suman más de 180 grados. Esta propiedad es útil para resolver problemas relacionados con la navegación y la astronomía.

Existen dos técnicas que se aplican a los triángulos esféricos que son la ley de los senos y cosenos que a continuación se describen.



Proyecta tu futuro
PLANEA Editorial
Prohibida su reproducción



1. **Ley de los senos esféricos.** Esta ley relaciona los lados y los ángulos de un triángulo esférico. Se formula como:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

Donde a, b y c son los lados del triángulo esférico, y A, B y C son los ángulos opuestos a estos lados. Para conocer cómo se aplica esta ley analiza el siguiente planteamiento:

La ruta de navegación entre tres puntos de la Tierra a, b, y c está formado por un triángulo esférico que tiene la distancia a es de 500 millas náuticas, mientras que la distancia b es de 700 millas náuticas, el ángulo B es de 60°, ¿Cuál es el valor del ángulo A?

Para dar solución a este planteamiento es necesario situar los datos en un triángulo esférico.

El siguiente paso es convertir las distancias en radianes, se sabe que una milla náutica es $\frac{1}{60}$ de grado y un grado es igual $\frac{\pi}{180}$ radianes, la conversión queda:

$$a = 500\ mi\ x\ \frac{\pi}{180\ x\ 60} = 0.145\ rad$$

$$b = 700\ mi\ x\ \frac{\pi}{180\ x\ 60} = 0.203\ rad$$

Se aplica la ley de senos esféricos: $\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B}$

Sustituyendo los valores:

$$\frac{\sin 0.145\ rad}{\sin A} = \frac{\sin 0.203\ rad}{\sin 60°}$$

$$\frac{0.1444}{\sin A} = \frac{0.2016}{0.8660}$$

$$\sin A = \frac{0.1444\ x\ 0.8660}{0.2016} = 0.6202$$

Para obtener el ángulo se utiliza se función inversa el seno.

$$A = \sin^{-1} 0.6202 = 38.33°$$

2. **Ley de los cosenos esféricos.** Similar a la ley de los cosenos en la geometría plana, pero adaptada a la geometría esférica, se utiliza para calcular los lados y ángulos de triángulos esféricos:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

Para comprender su aplicación analiza el siguiente ejemplo:

En astronomía, se requiere encontrar la distancia angular (c) entre dos estrellas vistas desde la Tierra, sabiendo que están separadas por un ángulo C = 70°, y las distancias angulares de estas estrellas desde un tercer punto de referencia son a = 50° y b = 60°.

Aplicando la ley de los cosenos esféricos se establece que:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

Sustituyendo los valores:

$$\cos c = \cos 50° \cos 60° + \sin 50° \sin 60° \cos 70°C$$

$$\cos c = 0.6427 \times 0.5 + 0.7660 \times 0.8660 \times 0.3420 = 0.5482$$

Finalmente, se calcula c:

$$c = \cos^{-1} 0.5482 = 56.75°$$

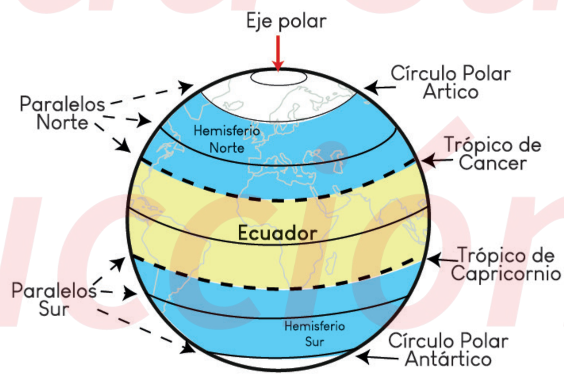


Diagrama de la Tierra que muestra los principales círculos de latitud y el eje polar desde la perspectiva de la geometría esférica.

Proyecta tu futuro
PLANEA Editorial
Prohibida su reproducción

Práctica de aprendizaje No. 11

Resuelve los siguientes problemas sobre geometría esférica.

1. Calcula la superficie de una esfera que tiene un radio de 6 unidades.

Proyecta tu futuro

PLANEA Editorial

Prohibida su reproducción

2. Determina la circunferencia de un círculo máximo en una esfera con un radio de 8 unidades.

Proyecta tu futuro
PLANEA Editorial
Prohibida su reproducción

3. En un triángulo esférico, los lados a y b son 30° y 45° respectivamente, y el ángulo C opuesto a c es de 60°. Encuentra el ángulo B opuesto al lado b.

Proyecta tu futuro
PLANEA Editorial
Prohibida su reproducción

Estudio independiente

Responde las siguientes preguntas.

1. ¿Qué caracteriza a la Geometría Euclidiana y qué papel tienen sus postulados?

2. ¿Por qué el quinto postulado de Euclides fue tan debatido históricamente?

3. ¿Qué diferencia hay entre la geometría euclidiana y la no euclidiana?

4. ¿Cómo se representa una línea recta en geometría no euclidiana?

5. ¿Por qué no se puede usar geometría euclidiana para calcular rutas aéreas o espaciales?

Proyecta tu futuro
PLANEA Editorial
Prohibida su reproducción

6. ¿Qué ejemplos reales muestran la utilidad de la geometría no euclidiana?

Criterios de evaluación	Nivel Básico (1 pt.)	Nivel Intermedio (2 pts.)	Nivel Avanzado (3 pts.)
Reconozco el planteamiento histórico de la Geometría Euclidiana y sus postulados.	Identifico que la geometría tiene reglas.	Describo los postulados y el papel del quinto.	Explico el sistema deductivo de Euclides y el debate histórico del quinto postulado.
Analizo las diferencias entre geometría euclidiana y no euclidiana.	Reconozco que hay geometrías diferentes.	Comparo modelos planos y curvos con ejemplos.	Analizo las implicaciones del quinto postulado y las propiedades de los modelos no euclidianos.
Relaciono las geometrías con ejemplos reales y su utilidad en la solución de problemas.	Menciono ejemplos simples de aplicación.	Relaciono geometría con problemas reales como rutas o mapas.	Explico con profundidad cómo se aplican los modelos geométricos en ciencia, tecnología y navegación.

Revisa tu desempeño:

9 puntos - Excelente.

De 6 a 8 puntos - Bien.

De 4 a 5 puntos - Suficiente.

3 puntos - Insuficiente.

Proyecta tu futuro
PLANEA Editorial
Prohibida su reproducción

Problema identificado, problema resuelto

"Nunca dudes que un pequeño grupo de personas pensantes y comprometidas pueden cambiar el mundo. De hecho son las únicas que lo han logrado".

Margaret Mead.

Lograr que se dé de forma eficiente el trabajo colaborativo puede ser complejo. Tener un objetivo común no es suficiente para colaborar. Cuando no se valora la diversidad, lo distinto (por ejemplo: identidades, carismas, cualidades e intereses) de quienes integran un grupo, pueden presentarse procesos organizativos tediosos, poco constructivos o, incluso, violentos. Además, para trabajar de manera colaborativa no hay fórmulas preestablecidas debido a que todos los grupos son distintos. De ahí la importancia de dialogar con apertura, libertad y respeto para detectar particularidades que limitan o favorecen la cooperación. **El reto es** identificar emociones y disposiciones mentales que facilitan u obstaculizan el trabajo colaborativo.

Actividad 1. *Formen equipos. Una vez sentados en equipos, no pueden hablar. Para realizar la actividad necesitan un bolígrafo y una hoja blanca por equipo. Deben completar un dibujo de manera coperativa. Establezcan turnos para que todos participen. En su turno, cada uno, solo puede hacer un trazo; luego continuará la siguiente persona y así de forma sucesiva. Recuerden, no se puede hablar y solo puede participar una persona a la vez haciendo solo un trazo. Tienen cuatro minutos para terminar la obra.*

Al finalizar el dibujo, respondan las siguientes preguntas:

1. ¿Cómo se sintieron?

2. ¿Fue fácil realizarlo?

3. ¿Cuál era la meta en común?

4. ¿Qué obstáculos encontraron?

5. ¿Qué implicaciones tuvo que no pudieran hablar?

6. ¿Los obstáculos se pueden solucionar si no hablan sobre ellos?

Proyecta tu futuro
PLANEA Editorial
Prohibida su reproducción

Actividad 2. *Piensen en alguna problemática que haya obstaculizado el trabajo en equipo y conversen sobre cómo pueden atenderla. Den ejemplos y propongan alternativas de solución. Luego de la conversación grupal, completa de manera individual la siguiente tabla.*

Problemáticas que afectan el trabajo colaborativo en el salón	¿Qué podemos hacer?

Reafirmo y ordeno

Trabajar de forma colaborativa implica estar dispuestos a practicar la comunicación asertiva como eje central. Si se pertenece a un grupo que tiene proyectos, es preciso ir prevenidos teniendo en cuenta que se presentarán desacuerdos entre los integrantes. Conversar sobre las problemáticas específicas que surgen suele ser una herramienta eficaz que anticipa que la colaboración sea efectiva.

Escribe en un minuto qué te llevas de la lección

Proyecta tu futuro
PLANEA Editorial
Prohibida su reproducción

Lee el siguiente texto de Elena Poniatowska denominado "La Identidad".

La identidad, cuento de Elena Poniatowska (Francia-México, 1932)

Yo venía cansado. Mis botas estaban cubiertas de lodo y las arrastraba como si fueran féretros. La mochila se me encajaba en la espalda, pesada. Había caminado mucho, tanto que lo hacía como un animal que se defiende. Pasó un campesino en su carreta y se detuvo. Me dijo que subiera. Con trabajo me senté a su lado. Calaba frío. Tenía la boca seca, agrietada en la comisura de los labios; la saliva se me había hecho pastosa. Las ruedas se hundían en la tierra dando vuelta lentamente. Pensé que debía hacer el esfuerzo de girar como las ruedas y empecé a balbucear unas cuantas palabras. Pocas. Él contestaba por no dejar y seguimos con una gran paciencia, con la misma paciencia de la mula que nos jalaba por los derrumbaderos, con la paciencia del mismo camino, seco y vencido, polvoroso y viejo, hilvanando palabras cerradas como semillas, mientras el aire se enrarecía porque íbamos de subida –casi siempre se va de subida-, hablamos, no sé, del hambre, de la sed, de la montaña, del tiempo, sin mirarnos siquiera. Y de pronto, en medio de la tosquedad de nuestras ropas sucias, malolientes, el uno junto al otro, algo nos atravesó blanco y dulce, una tregua transparente. Y nos comunicamos cosas inesperadas, cosas sencillas, como cuando aparece a lo largo de una jornada gris un espacio tierno y verde, como cuando se llega a un claro en el bosque. Yo era forastero y sólo pronuncié unas cuantas palabras que saqué de mi mochila, pero eran como las suyas y nada más las cambiamos unas por otras. Él se entusiasmó, me miraba a los ojos, y bruscamente los árboles rompieron el silencio. "Sabe, pronto saldrá el agua de las hendiduras". "No es malo vivir en la altura. Lo malo es bajar al pueblo a echarse un trago porque luego allá andan las viejas calientes. Después es más difícil volver a remontarse, no más acordándose de ellas"... Dijimos que se iba a quitar el frío, que allá lejos estaban los nubarrones empujándolo y que la cosecha podía ser buena. Caían nuestras palabras como gruesos terrones, como varas resecas, pero nos entendíamos.

Llegamos al pueblo donde estaba el único mesón. Cuando bajé de la carreta empezó a buscarse en todos los bolsillos, a vaciarlos, a voltearlos al revés, inquieto, ansioso, reteniéndome con los ojos: "¿Qué le regalaré? ¿qué le regalo? Le quiero hacer un regalo..." Buscaba a su alrededor, esperanzado, mirando el cielo, mirando el campo. Hurgoneó de nuevo en su vestido de miseria, en su pantalón tieso, jaspeado de mugre, en su saco usado, amoldado ya a su cuerpo, para encontrar el regalo. Miró hacia arriba, con una mirada circular que quería abarcar el universo entero. El mundo permanecía remoto, lejano, indiferente. Y de pronto todas las arrugas de su rostro ennegrecido, todos esos surcos escarbados de sol a sol, me sonrieron. Todos los gallos del mundo habían pisoteado su cara, llenándola de patas. Extrajo avergonzado un papelito de no sé dónde, se sentó nuevamente en la carreta y apoyando su gruesa mano sobre las rodillas tartamudeó:

-Ya sé, le voy a regalar mi nombre.

Fuente: De noche vienes (1979), México D.F., Ediciones Era, 1985, págs. 16-17, recuperado de: Cuento breve recomendado: "La identidad", de Elena Poniatowska

Prohibida su reproducción

Responde las siguientes preguntas.

1. ¿Cuál es el tema principal del cuento "La identidad" de Elena Poniatowska?

2. ¿Qué simboliza el viaje del protagonista en el cuento "La identidad"?

3. ¿Cómo se aborda el tema de la memoria histórica en el cuento "La identidad"?

Proyecta tu futuro
PLANEA Editorial
Prohibida su reproducción

1ra Evaluación de unidad de aprendizaje

Resuelve los siguientes planteamientos y subraya la respuesta correcta.

1. En un triángulo ABC, el ángulo A mide 40° y el ángulo B mide 70°. ¿Cuál es la medida del ángulo C?

   a) 60° **b)** 70° **c)** 80° **d)** 90°

2. En un triángulo isósceles, los ángulos de la base son 50° cada uno. ¿Cuál es la medida del ángulo del vértice?

   a) 80° **b)** 90° **c)** 100° **d)** 120°

3. En un triángulo rectángulo, los catetos miden 6 cm y 8 cm. ¿Cuál es la longitud de la hipotenusa?

   a) 7 cm **b)** 8 cm **c)** 9 cm **d)** 10 cm

4. En un triángulo ABC, $\angle A=30°$, $\angle B=45°$ y el lado a frente al ángulo A mide 5 cm. ¿Cuál es la longitud del lado b frente al ángulo B?

   a) $5\sqrt{2}$ cm **b)** $10\sqrt{2}$ cm **c)** $7\sqrt{3}$ cm **d)** $9\sqrt{2}$ cm

5. En un triángulo ABC, los lados a y b miden 7 cm y 10 cm, respectivamente, y el ángulo $\angle C$ entre ellos mide 60°. ¿Cuál es la longitud del lado c opuesto al ángulo $\angle C$.

   a) 7 cm **b)** $\sqrt{79}$ cm **c)** $\sqrt{99}$ cm **d)** $\sqrt{109}$ cm

6. En un cuadrilátero convexo, los ángulos A, B, y C miden 90°, 85° y 95° respectivamente. ¿Cuál es la medida del ángulo D?

   a) 90° **b)** 85° **c)** 80° **d)** 75°

7. En un triángulo equilátero, si cada lado mide 6 cm, ¿cuál es la altura del triángulo?

   a) $3\sqrt{3}$ cm **b)** $4\sqrt{3}$ cm **c)** $5\sqrt{3}$ cm **d)** $6\sqrt{3}$ cm

8. En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 13 cm y uno de los catetos mide 5 cm. ¿Cuál es la longitud del otro cateto?

   a) 9 cm **b)** 10 cm **c)** 11 cm **d)** 12 c

Proyecta tu futuro
PLANEA Editorial
Prohibida su reproducción

Temas selectos de matemáticas 1

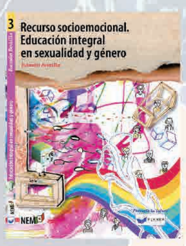
La Editorial Planea tiene como misión crear materiales didácticos de calidad, con los contenidos adecuados para impactar positivamente en la formación de los estudiantes, desarrollando sus conocimientos, habilidades y actitudes, que los transformen en jóvenes capaces de comprender su entorno e influir en él, aprender de manera autónoma a largo de su vida, ser consciente de sus destrezas para resolver problemas y aceptar retos que lo ayuden a alcanzar su metas, ser sensibles al arte y sus expresiones, asimismo activar la participación ciudadana que reafirme su conciencia cívica y ética, fomentando una actitud respetuosa a la interculturalidad, diversidad de creencias, valores e ideas, asumiendo un pensamiento crítico que ayude al desarrollo sustentable de su comunidad.

El libro de **Temas selectos de matemáticas 1**, está desarrollado bajo los Principios de la Nueva Escuela Mexicana, teniendo como eje rector el Nuevo Modelo Educativo de la Educación Media Superior y el programa de estudio por progresiones para la **Dirección General de Bachillerato (DGB)**, el cual propone los siguientes aprendizajes trayectoria del Recurso Sociocognitivo de Pensamiento Matemático:

- Valora la aplicación de procedimientos automáticos y algorítmicos, así como la interpretación de sus resultados para anticipar, encontrar y validar soluciones a problemas matemáticos, de áreas del conocimiento y de su vida personal.
- Adopta procesos de razonamiento matemático tanto intuitivos como formales tales como observar, intuir, conjeturar y argumentar, para relacionar información y obtener conclusiones de problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades y de la vida cotidiana).
- Modela y propone soluciones a problemas tanto teóricos como de su entorno, empleando lenguaje y técnicas matemáticas.
- Explica el planteamiento de posibles soluciones a problemas y la descripción de situaciones en el contexto que les dio origen empleando lenguaje matemático y lo comunica a sus pares para analizar su pertinencia.

En la Editorial Planea tenemos un compromiso por desarrollar materiales que cumplan con las expectativas de las comunidades educativas.

Titulos relacionados



Clave: 20264
ISBN 978-607-5902-30-2
9786075902302

Serie Iso

NEM

771-159-1900
www.editorialplanea.com.mx

4 *René Pérez y Yoko Espinoza* Temas selectos de matemáticas 1

DGB