

Pensamiento matemático **3**

Pensamiento algebraico e introducción a geometría plana

René Pérez Moreno
Propósitos formativos



Serie Iso

“proyecta tu futuro”



SINBANEM



PLANEA
Editorial



Pensamiento matemático 3

Pensamiento algebraico e introducción a geometría plana

Primera Edición 2026

Copyright © Editorial Planea

ISBN: en trámite.

Impreso en México

Contacto: 771-655-6186

Correo electrónico:

informes@planeaeditorial.com.mx

Se reservan todos los derechos. Está prohibida la reproducción, almacenamiento en sistemas de recuperación o transmisión de estas publicaciones, ya sea de forma electrónica, mecánica, mediante fotocopia, grabación u otros medios, sin el consentimiento previo del editor. Esto incluye su distribución en redes, almacenamiento electrónico o transmisión para fines de aprendizaje a distancia.

Editor en jefe: Cosme Lorenzo Rodríguez

Autor: René Pérez Moreno

Correctora: Angélica María Alvarado Carreón

Diseño: Nasbbi Irazú Portes Loeza

Imágenes: Adobe Stock


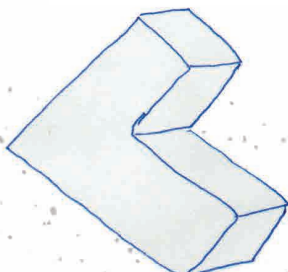
Aviso de exención de responsabilidad:

Los enlaces incluidos en este libro no son propiedad de Editorial Planea, por lo que no se tiene control sobre la información proporcionada por los sitios web en un momento determinado, ni se puede garantizar la exactitud de la información proporcionada por terceros (enlaces externos). Aunque la información se recopila con cuidado y se actualiza de manera constante, no se asume responsabilidad alguna por su exactitud, integridad o actualidad.

Los artículos atribuidos a los autores reflejan sus opiniones y, a menos que se indique de forma específica, no representan las opiniones del editor. Además, la reproducción de este libro o cualquier material de los sitios web incluidos en él no está autorizada, ya que dicho material puede estar sujeto a derechos de propiedad intelectual.

Los derechos pertenecen a sus respectivos propietarios, y Editorial Planea no se hace responsable de la información mostrada en los enlaces proporcionados.

Presentación



En la Editorial Planea estamos comprometidos con ofrecer materiales didácticos de alta calidad, apegados al Nuevo Modelo Educativo de la Educación Media Superior, basado en la premisa de desarrollar en ti, joven estudiante, un aprendizaje situado en tu entorno, que te ayude en tu día a día, adaptándote a los cambios y brindarte un constante aprendizaje inclusivo, pluricultural, colaborativo y equitativo, basado en los principios de la Nueva Escuela Mexicana.

Este libro se encuentra apegado al 100 % al programa de estudio basado en propósitos y contenidos formativos para la asignatura de **Pensamiento Matemático 3. Pensamiento algebraico e introducción a geometría plana**, donde a partir de la aplicación del lenguaje algebraico como herramienta para describir situaciones de la realidad y expresar relaciones matemáticas permite, mediante procesos de intuición y razonamiento, la explicación y resolución de problemas.

La manera en la que se organiza la propuesta se basa en la reformulación al MCCEMS, donde se hace énfasis a la evaluación diagnóstica al inicio del libro con la finalidad de conocer el nivel cognitivo y de habilidades en la asignatura.

Cada propósito formativo se aborda con la recuperación de saberes previos, la secuencia didáctica en los momentos de apertura, desarrollo y cierre, y finaliza con la evaluación formativa.

Este libro, está diseñado para ti, con la finalidad de comprender las matemáticas como expresión del pensamiento humano, para aplicar el lenguaje algebraico, las relaciones matemáticas y los conceptos fundamentales de la geometría plana.



La Nueva Escuela Mexicana NEM

La Nueva Escuela Mexicana (NEM) parte de un diagnóstico donde la educación se entendía como tres ciclos sin conexión, la educación básica (preescolar, primaria y secundaria), la educación media superior y la educación superior, con base en este diagnóstico se construye una propuesta donde la educación debe ser entendida para toda la vida, bajo el concepto de aprender a aprender, la actualización continua, adaptación a los cambios y el aprendizaje permanente.

La NEM propone un plan de 23 años en los diferentes niveles educativos, los cuales estén interconectados entre sí, donde se potencialice la formación integral de las niñas, niños, adolescentes y jóvenes con el objetivo de promover el aprendizaje de excelencia, inclusivo, pluricultural, colaborativo y equitativo a lo largo de su formación.

Para alcanzar el bienestar y la prosperidad incluyente, la NEM se fundamenta en los siguientes principios:



Fomento de la identidad con México. El amor a la patria, el aprecio por su cultura, el conocimiento de su historia y el compromiso de los valores plasmados en la Constitución Política, son las acciones que forman este principio.

Responsabilidad ciudadana. El principio implica la aceptación de derechos y deberes personales y comunes, el respeto por los valores cívicos por parte de los estudiantes formados en la NEM es esencial para transmitir los valores de honestidad, respeto, justicia, solidaridad, reciprocidad, lealtad, libertad, equidad y gratitud.



Honestidad. Se destaca este valor dentro de la responsabilidad social de los estudiantes, el cual permite formar una sociedad con base en la confianza y el sustento de la verdad de todas las acciones para permitir una sana relación entre los ciudadanos.

Respeto de la dignidad humana. Promover el respeto irrestricto a la dignidad y los derechos humanos de las personas, con base en la convicción de la igualdad de todos los individuos en derechos, trato y oportunidades.





Respeto por la naturaleza y cuidado del medio ambiente. La conciencia ambiental favorece la protección y conservación del medio ambiente, la prevención de la contaminación y cambio climático comienza con la educación del desarrollo sostenible.

Promoción de la interculturalidad.

El aprecio y la comprensión por la diversidad cultural y lingüística, así como, el diálogo y el intercambio cultural es una fuerza motriz para tener una vida intelectual, afectiva, moral y espiritual.



Participación en la transformación de la sociedad.

La superación de cada persona por iniciativa propia es la base de este principio, el sentido social de la educación permite construir relaciones cercanas, solidarias y fraternas que superan las indiferencias y la apatía por transformar la sociedad.



Promoción de la cultura de la paz. El objetivo de la agenda 2030 que promueve "Paz, justicia e instituciones sólidas", tiene como fundamento promover sociedades pacíficas, inclusivas, que faciliten el desarrollo sostenible, el acceso a la justicia para todos y la construcción a todos los niveles de instituciones eficaces e inclusivas que rindan cuentas.



Conoce tu libro

Dentro del libro se encuentra desarrollado el Nuevo Modelo Educativo de la Educación Media Superior, el cual se basa en un programa de estudio por progresiones de aprendizaje, las cuales se desarrollan en tres momentos que son:



Apertura. En este primer momento se busca despertar el interés y la motivación del estudiante por el tema que se va a abordar.



Cierre. En este último momento se busca consolidar los aprendizajes y hacer una evaluación del proceso.



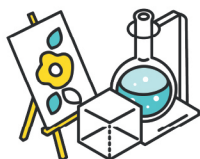
Desarrollo. Se presenta el contenido y se realiza una explicación clara y detallada de los conceptos clave.

También se encuentran las secciones:



Evaluación diagnóstica. Se encuentra al inicio del libro, ayuda a identificar las fortalezas y debilidades con los temas que se van a abordar.

Saberes previos. Son los conocimientos, experiencias y creencias que funcionan como base para construir aprendizajes significativos, al conectar lo nuevo con lo conocido.



Prácticas transversales.

Donde se enlazan los aprendizajes de los recursos socio-cognitivos con las disciplinas de las áreas de conocimiento.

Prácticas socioemocionales.

El currículum ampliado se vincula con los recursos sociocognitivos, áreas de conocimiento por medio de los diferentes ámbitos de los recursos socioemocionales que están presentes en este tipo de actividades.





Prácticas de aprendizaje. La mejor manera de aplicar los conocimientos y habilidades aprendidas es a través de este tipo de prácticas, las cuales están numeradas, ubicadas en un contexto de aprendizaje y potencializando un principio de la NEM, como se muestra en el siguiente ejemplo:



Práctica de aprendizaje



Lectura NEM. Es una actividad de comprensión lectora que aborda uno de los principios de la Nueva Escuela Mexicana.



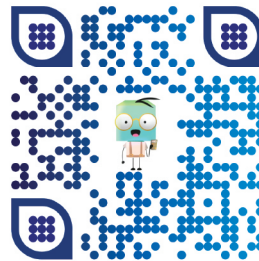
Indicación de propósito formativo. Se encuentran en la parte superior derecha del libro, indicando el propósito formativo que se está trabajando.

Evaluación formativa. Es el proceso continuo que permite recoger información sobre el aprendizaje de los estudiantes para retroalimentarlos y ajustar la enseñanza.



Proyecto Aula - Escuela - Comunidad (PAEC). En estos códigos QR podrás realizar las actividades de las progresiones que son parte del PAEC.

Maestro Iso. Cada vez que veas al maestro Iso, él te explica la progresión de manera dinámica escaneando el código QR.



Perfil de egreso

1. Desarrolla una actitud reflexiva que le permite conocer, problematizar y argumentar sobre las situaciones que afectan su ámbito comunitario, regional y global, a partir del diálogo y desde una perspectiva humanista y científica.
2. Reconoce su condición histórica y social para intervenir en la conformación y transformación de las estructuras políticas que organizan la sociedad que habita.
3. Se involucra en la búsqueda del bienestar humano y del cuidado del medio ambiente a partir de la comprensión ética de las ciencias, humanidades y tecnologías en tanto construcciones colectivas que buscan explicar los fenómenos de su entorno.
4. Conoce, defiende y ejerce su derecho como persona ciudadana a participar en la construcción y el desarrollo de alternativas que promuevan la justicia social, desde una perspectiva intercultural, de derechos humanos e igualdad de género.
5. Ejerce su ciudadanía digital a través de un posicionamiento ético sobre la pertinencia del desarrollo, distribución y uso de las tecnologías digitales.
6. Cuida su salud de forma integral a partir de la alimentación sana, la práctica de actividad física y la construcción de vínculos intersubjetivos responsables basados en el respeto a la diferencia, la dignidad, la igualdad sustantiva y los derechos humanos.
7. Utiliza herramientas orales y escritas para la expresión clara y coherente de sus ideas y emociones.
8. Hace uso de las teorías, metodologías y pensamiento algorítmico de las diversas áreas del conocimiento para entender, intervenir y resolver problemas de su cotidianeidad.
9. Reconoce, aprecia y aprehende el valor estético del patrimonio cultural, así como de las diferentes manifestaciones artísticas de su contexto.

Meta de educativa:

- Aplique el lenguaje algebraico como herramienta para describir situaciones de la realidad y expresar relaciones matemáticas, y mediante procesos de intuición y razonamiento, logre explicar y resolver problemas.

Propósitos y contenidos formativos

1. Aplica la aritmética y el manejo del álgebra para encontrar el valor de una incógnita en ecuaciones lineales que refieran a situaciones de interés.
 - Concepto de ecuación y sus partes.
 - Ecuaciones lineales de primer grado.
 - Procedimiento para encontrar el valor de una incógnita.
 - Forma estándar de las ecuaciones lineales.
2. Aplica la aritmética y el manejo del álgebra para resolver ecuaciones lineales con dos incógnitas que refieran a situaciones de interés.
 - Ecuaciones lineales con dos incógnitas.
 - Procedimiento para solucionar ecuaciones lineales con dos incógnitas.
 - Ecuación de la recta.
 - Concepto de plano cartesiano: ejes perpendiculares, horizontal (X) y vertical (Y).
 - Representación gráfica de la ecuación de la recta.
3. Aplica la aritmética, el manejo del álgebra y el método gráfico para resolver sistemas de ecuaciones lineales que refieran a situaciones de interés.
 - Método de igualación.
 - Método de sustitución.
 - Método de reducción.
 - Método gráfico.
 - Método por determinantes.
4. Aplica la aritmética y el manejo del álgebra para resolver ecuaciones cuadráticas que refieran a situaciones de interés.
 - Ecuaciones cuadráticas.
 - Forma general de la ecuación cuadrática.
 - Resolución por el método de completar cuadrados.
 - Aplicación de la fórmula general para ecuaciones cuadráticas.
 - Representación gráfica.
5. Expresa y resuelve diversas situaciones de interés a través de distintos tipos de ecuaciones para comprender su relevancia en otras áreas del conocimiento, fenómenos naturales o en distintas esferas de la vida humana.
 - Cálculo de intereses simples y compuestos en finanzas personales.
 - Descripción del crecimiento poblacional o propagación de fenómenos (ej. Epidemia).
 - Determinar medidas o cantidades de materiales en proyectos de arquitectura.
6. Revisa el teorema del triángulo de Napoleón, considerándolo como un problema-meta para aplicar resultados de la geometría euclidiana.
 - Introducción a la geometría plana.
 - Ángulos, definición, tipos y componentes.
 - Teorema de Pitágoras.
 - Construcción de triángulos rectángulos.
 - Criterios de congruencia y semejanza de triángulos.

Contenido

Propósito formativo 1: Ecuaciones lineales con una incógnita.

- Concepto y partes de una ecuación.
- Ecuaciones lineales de primer grado.
- Resolución de ecuaciones lineales de primer grado.
- Forma estándar de las ecuaciones lineales.

Propósito formativo 2: Ecuaciones lineales con dos incógnitas.

- Resolución de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Ecuación de la recta.
- Plano cartesiano.
- Gráfica de la ecuación de la recta.

Propósito formativo 3: Sistemas de ecuaciones lineales.

- Método de igualación.
- Método de sustitución.
- Método de reducción.
- Método gráfico.
- Método por determinantes.

Propósito formativo 4: Ecuaciones cuadráticas.

- Forma general.
- Método de completar cuadrados.
- Resolución por fórmula general.
- Representación gráfica.

Propósito formativo 5: Aplicaciones de las ecuaciones matemáticas.

- Cálculo de intereses simples y compuestos.
- Fenómenos naturales y sociales.
- Cálculo de materiales en proyectos de arquitectura.

Propósito formativo 6: Geometría plana.

- Introducción.
- Ángulos.
- Triángulos y construcción de rectángulos.
- Teorema de Pitágoras.
- Congruencia y semejanza de triángulos.

Evaluación diagnóstica

Lee con cuidado cada planteamiento y selecciona la opción que consideres correcta.

- Juan compró una mochila y una calculadora. La calculadora costó el doble que la mochila. Si en total pagó \$750, ¿cuál es la ecuación que representa el precio de la mochila (x)?
a) $x + 2 = 750$ b) $x + 2x = 750$ c) $2x - x = 750$ d) $x + x/2 = 750$
- La temperatura actual es el triple de la temperatura registrada al amanecer. Si durante el día subió 8°C más y ahora marca 29°C , ¿qué ecuación permite encontrar la temperatura del amanecer (t)?
a) $3t + 8 = 29$ b) $t/3 + 8 = 29$ c) $3(t + 8) = 29$ d) $8t + 3 = 29$
- Resuelve: $4(2x - 3) = 5(x + 6)$. ¿Cuál es el valor de x ?
a) $x = 14$ b) $x = 8$ c) $x = 6$ d) $x = -2$
- En una tienda de ropa, por ser "Día de rebajas", al precio original de un pantalón se le aplica un descuento del 15%. Si al final se pagaron \$510, ¿cuál es la ecuación que permite calcular el precio original (p)?
a) $p - 15 = 510$ b) $1.15p = 510$ c) $0.85p = 510$ d) $0.15p = 510$
- En un estacionamiento hay 50 vehículos entre coches y motocicletas. Si en total se contaron 140 ruedas (sin considerar refacciones), ¿cuál de los siguientes sistemas de ecuaciones representa la situación? (x = coches, y = motos)
a) $x + y = 140$; $4x + 2y = 50$ b) $x + y = 50$; $2x + 4y = 140$
c) $4x + 4y = 50$; $x + y = 140$ d) $x + y = 50$; $4x + 2y = 140$
- Una cuerda de 24 metros se corta en dos partes de manera que una parte mide el triple de la otra. Si "a" es la parte larga y "b" la parte corta, ¿qué sistema representa esta situación?
a) $a + b = 24$; $a = b/3$ b) $a - b = 24$; $a = 3b$
c) $a + b = 24$; $a = 3b$ d) $a + b = 24$; $a = b + 3$
- Dada la ecuación $3x - 2y = 8$, ¿cuál de los siguientes pares ordenados es una solución?
a) (2, -1) b) (4, 2) c) (0, 4) d) (10, 11)
- En una función de cine, 5 boletos de adulto y 3 de niño cuestan \$420. Otra familia pagó \$290 por 3 boletos de adulto y 2 de niño. ¿Cuál es el sistema que permite hallar el precio de cada boleto? (A = Adulto, N = Niño)
a) $5A + 3N = 290$; $3A + 2N = 420$ b) $8A + 5N = 710$; $A + N = 5$
c) $3A + 5N = 420$; $2A + 3N = 290$ d) $5A + 3N = 420$; $3A + 2N = 290$

Evaluación diagnóstica

9. Observa la gráfica de dos rectas que se intersecan en el punto $(3, -1)$. ¿Cuál de los siguientes sistemas de ecuaciones es consistente con dicha intersección?

a) $x + y = 2; x - y = 4$

b) $2x + y = 5; x - 2y = 5$

c) $3x + y = 8; x + y = 4$

d) $x - y = 4; 2x + y = 3$

10. Un sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones. ¿Cómo se verían las rectas en el plano cartesiano?

a) Dos rectas perpendiculares.

b) Dos rectas que se cruzan en un solo punto.

c) Dos rectas paralelas que nunca se tocan.

d) Una sola recta (coincidentes).

11. Al resolver el sistema $y = 2x - 1$ y $y = -x + 5$ por el método gráfico, se observa que las rectas se cruzan. ¿Cuál es la solución del sistema?

a) $(1, 1)$

b) $(2, 3)$

c) $(3, 5)$

d) $(4, 7)$

12. Para el sistema: $2x + y = 10$ y $4x + 2y = 30$, ¿qué característica tiene su representación gráfica?

a) Las rectas se intersecan en el origen.

b) Las rectas son perpendiculares.

c) Las rectas son paralelas (no se tocan).

d) Las rectas son coincidentes.

13. El área de un terreno rectangular es de 48 m^2 . Si el largo mide 2 metros más que el ancho, ¿cuál es la ecuación cuadrática que modela la situación? ($x = \text{ancho}$)

a) $x^2 + 2x - 48 = 0$

b) $x^2 - 2x - 48 = 0$

c) $x^2 + 48x + 2 = 0$

d) $2x^2 - 48 = 0$

14. ¿Cuáles son las soluciones (raíces) de la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$?

a) $x = -2, x = -3$

b) $x = 1, x = 6$

c) $x = 2, x = 3$

d) $x = -1, x = 5$

Evaluación diagnóstica

15. Una pelota es lanzada hacia arriba y su altura está dada por $h(t) = -5t^2 + 20t$. ¿En qué momento la altura es 0 (cae al suelo) si $t > 0$?
- a) 2 segundos b) 4 segundos c) 5 segundos d) 10 segundos
16. ¿Qué valor debe tener “k” para que la ecuación $x^2 + kx + 25 = 0$ tenga una única solución real (raíz doble)?
- a) 5 b) 10 o -10 c) 25 d) 0
17. La ley de enfriamiento de Newton establece que la temperatura T de un objeto cambia según la ecuación $T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt}$. Esta ecuación relaciona fenómenos de la física con el álgebra porque:
- a) Solo se usa para sumar temperaturas.
b) Permite modelar el cambio de temperatura a lo largo del tiempo usando funciones exponenciales y ecuaciones.
c) Es una ecuación cuadrática disfrazada.
d) Demuestra que la temperatura nunca baja.
18. Un biólogo estudia el crecimiento de una colonia de bacterias. Observa que cada hora la población se duplica. Si inició con 500 bacterias, ¿cuál de las siguientes expresiones permite calcular cuántas bacterias habrá después de 8 horas?
- a) $500 + 2^8$ b) 500^8 c) $500 \cdot 2^8$ d) $500 \cdot 8^2$
19. El Teorema del Triángulo de Napoleón establece que si se construyen triángulos equiláteros sobre los lados de cualquier triángulo, los centros de esos triángulos equiláteros forman:
- a) Un triángulo rectángulo isósceles.
b) Una línea recta.
c) Un hexágono regular.
d) Un triángulo equilátero.
20. ¿Cuál de las siguientes ramas de la geometría se aplica para demostrar el Teorema del Triángulo de Napoleón (considerándolo un problema-meta)?
- a) Geometría Analítica (Cálculo de distancias).
b) Geometría Hiperbólica.
c) Geometría Euclidiana (Congruencia de triángulos y rotaciones).
d) Topología Diferencial.



$$\frac{d}{dx} \cos^{-1} x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{a} \sec^{-1} \frac{x}{a} \right) = \frac{1}{x^2 - a^2}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{a} \operatorname{cosec}^{-1} \frac{x}{a} \right) = \frac{-1}{x^2 - a^2}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{a} \sec^{-1} \frac{x}{a} \right) = \frac{1}{x^2 - a^2}$$

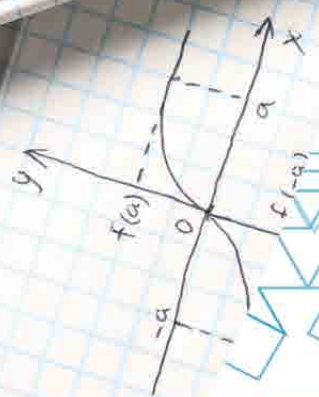
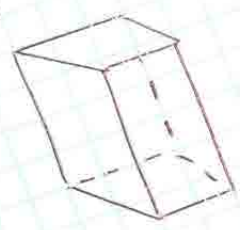
$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{a} \operatorname{cosec}^{-1} \frac{x}{a} \right) = \frac{-1}{x^2 - a^2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{-1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a} \sin^{-1} \frac{x}{a} + C$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a} \right| + C$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$



$$\int \frac{1}{a} \sec^{-1} \frac{x}{a} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$\int \frac{1}{a} \operatorname{cosec}^{-1} \frac{x}{a} dx = \frac{1}{a} \int \frac{-1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a} \right| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

Propósito formativo 1

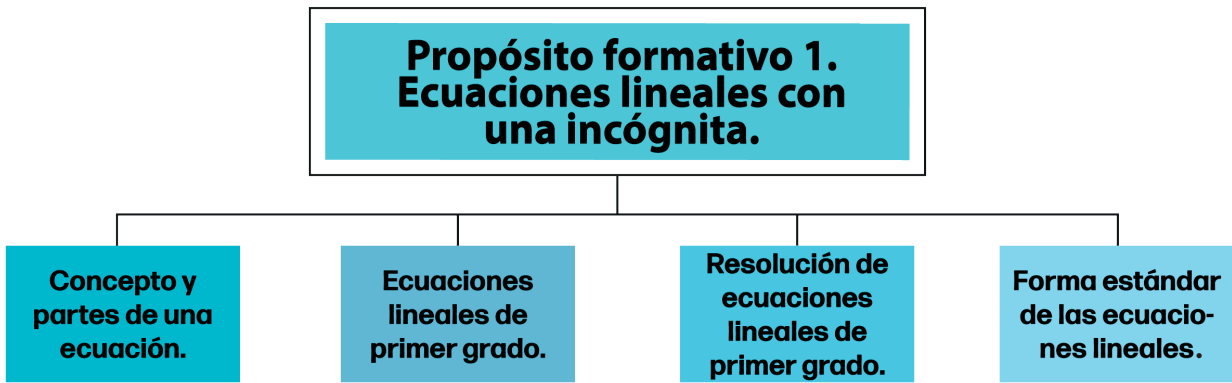
Ecuaciones lineales con una incógnita

La resolución de ecuaciones lineales impulsa el análisis crítico y la toma de decisiones fundamentadas, pues exige justificar procedimientos, verificar resultados y reconocer la coherencia de las soluciones. Con ello se fortalece la capacidad para modelar fenómenos cotidianos y argumentar con claridad en contextos académicos y prácticos.

El propósito formativo uno se define como:

- Aplica la aritmética y el manejo del álgebra para encontrar el valor de una incógnita en ecuaciones lineales que refieran a situaciones de interés.

Los contenidos formativos que se abordan el propósito se observan en el siguiente esquema:



Saberes previos

Lee de manera atenta cada situación y plantea la ecuación lineal que la representa. Luego, utiliza tus conocimientos previos de suma, resta, multiplicación y división, para encontrar el valor de la incógnita solicitada. No es necesario usar métodos formales de despeje complejos, puedes usar el razonamiento lógico y las operaciones inversas.

1. Contrataste un plan de internet móvil que tiene un costo fijo mensual de \$150. Además, cada vez que envías un mensaje de texto (fuera de apps de datos) te cobran \$2 adicionales. Al final del mes, la factura total fue de \$198.

¿Cuántos mensajes de texto enviaste ese mes?

- Incógnita (m): Número de mensajes enviados.
- Planteamiento: Costo fijo + (Costo por mensaje \times Cantidad) = Total.

2. Quieres invitar a varios amigos al cine para tu cumpleaños. Compras un combo grande de palomitas y refrescos para compartir que cuesta \$180. Sabes que cada boleto de entrada por persona cuesta \$95. Si gastaste un total de \$940 en las entradas y el combo juntos.

¿A cuántos amigos invitaste (contándote a ti mismo)?

- Incógnita (x): Número total de personas que fueron al cine.
- Planteamiento: Costo de las palomitas + (Costo del boleto \times Número de personas) = Gasto Total.



Saberes previos

3. Estás ahorrando para comprar unos tenis que cuestan \$1 350. Decides abrir una alcancía y meter \$450 que tenías guardados del mes pasado. Luego, cada semana de este mes piensas depositar la misma cantidad de dinero. Si al final del mes (4 semanas) tienes el precio de los tenis. ¿Cuánto dinero depositaste cada semana?
- Incógnita (s): Cantidad ahorrada por semana.
 - Planteamiento: Dinero inicial + (Ahorro semanal \times 4 semanas) = Precio de los tenis.

4. Piensa en un número. le sumas 15 y luego multiplicas el resultado por 2. Después le restas 10, y por último, el resultado es 50. ¿En qué número pensaste al inicio?
- Incógnita (n): El número pensado.
 - Planteamiento: $(n + 15) \times 2 - 10 = 50$

Ecuaciones lineales con una incógnita



Apertura

Las ecuaciones lineales con una incógnita constituyen una herramienta del pensamiento matemático. Representan un equilibrio entre dos expresiones separadas por el signo de igualdad, en el que un valor desconocido puede determinarse mediante la aplicación de operaciones inversas. Este tipo de razonamiento algebraico trasciende el ámbito escolar y se instala en la resolución de problemas cotidianos: desde calcular cuánto combustible consume un automóvil en un trayecto determinado hasta distribuir un presupuesto familiar entre gastos fijos y variables. La capacidad de traducir una situación del lenguaje común a una estructura simbólica del tipo $ax + b = c$ permite desentrañar relaciones ocultas entre datos en apariencia inconexos. Dominar el despeje de la incógnita equivale a poseer una llave que abre cerraduras numéricas presentes en facturas, ofertas comerciales, recetas de cocina o mediciones de materiales de construcción. Cada paso en la simplificación de una ecuación exige un manejo preciso de las propiedades de la igualdad: sumar, restar, multiplicar o dividir en ambos miembros para preservar la armonía matemática sin alterar la verdad de la proposición. El proceso, aunque metódico, encierra una lógica que resulta satisfactoria cuando el valor buscado emerge con nitidez al final del camino deductivo.



Práctica de aprendizaje



Lee el siguiente caso.

Imagina la siguiente escena: entras a tu red social favorita y descubres que una publicación tuya se ha vuelto viral. La plataforma te muestra una estadística curiosa: “El número de reacciones totales equivale al triple de los comentarios menos cuarenta unidades, y el total de reacciones alcanza la cifra de doscientos sesenta”. La incógnita que despierta tu curiosidad es inmediata: ¿cuántos comentarios generó esa publicación?





Desarrollo

PF1

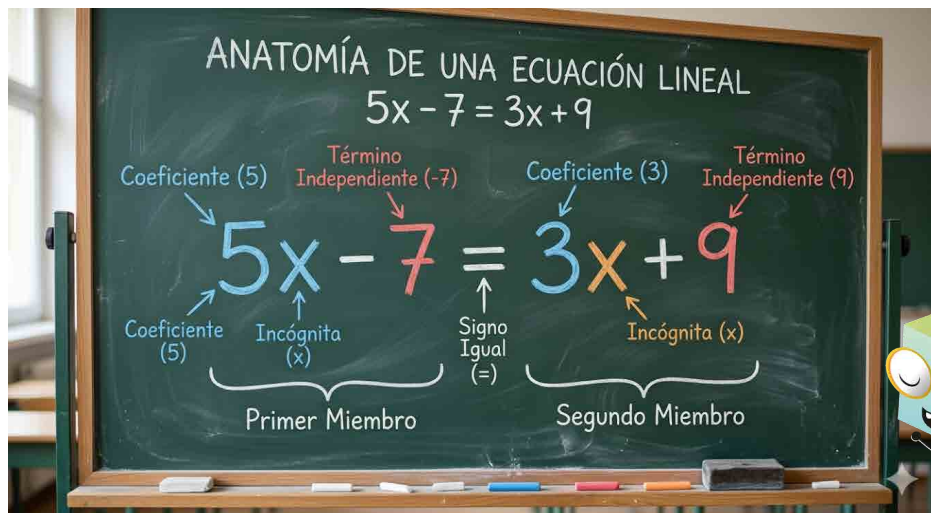
Concepto y partes de una ecuación.

Una ecuación es una igualdad matemática entre dos expresiones algebraicas. Esta igualdad se representa mediante el símbolo “=” y establece una relación de equivalencia que debe cumplirse para ciertos valores numéricos. En el ámbito del álgebra elemental, las ecuaciones constituyen el punto de partida para el modelado de situaciones reales y la resolución de problemas donde intervienen cantidades desconocidas. El objetivo central del estudio de ecuaciones es determinar el valor o los valores que, al sustituirse en el lugar de la incógnita, hacen que la igualdad sea verdadera. A ese proceso se le denomina “resolver la ecuación”, y al valor encontrado se le llama “solución” o “raíz”.

Partes de una ecuación

Para analizar una ecuación con precisión, es necesario identificar cada uno de sus componentes estructurales. A continuación, se desglosan estos elementos con la ecuación lineal $5x - 7 = 3x + 9$ como referencia.

- 1. Incógnita.** Es la letra que representa el valor desconocido que se busca. En el ejemplo, la incógnita es x . Por convención, se utilizan las últimas letras del alfabeto (x , y , z) para denotar valores no determinados.
- 2. Coeficiente.** Es el factor numérico que multiplica a la incógnita. En el término $5x$, el coeficiente es 5; en $3x$, el coeficiente es 3. Si la incógnita aparece sola (por ejemplo, x), su coeficiente es 1, aunque no se escriba de manera explícita.
- 3. Término independiente o constante.** Son los valores numéricos fijos que no están acompañados de la incógnita. En el ejemplo, los términos independientes son -7 (en el primer miembro) y $+9$ (en el segundo miembro).
- 4. Miembros.** Son las expresiones algebraicas ubicadas a cada lado del signo igual.
 - Primer miembro. La expresión situada a la izquierda del signo “=”. En este caso: $5x - 7$.
 - Segundo miembro. La expresión situada a la derecha del signo “=”. En este caso: $3x + 9$.
- 5. Términos.** Son cada una de las partes separadas por los signos de suma (+) o resta (-). En el primer miembro los términos son $5x$ y -7 ; en el segundo miembro son $3x$ y $+9$.



Ecuaciones lineales de primer grado

Una ecuación lineal de primer grado, denominada también ecuación de primer grado con una incógnita; es una igualdad algebraica donde la variable o incógnita aparece elevada a la potencia uno. La ausencia de exponentes superiores, raíces o productos entre variables confiere a estas ecuaciones una estructura particular que permite su resolución mediante un conjunto sistemático de transformaciones algebraicas. La expresión canónica que define a una ecuación lineal es:

$$ax + b = 0$$

Donde:

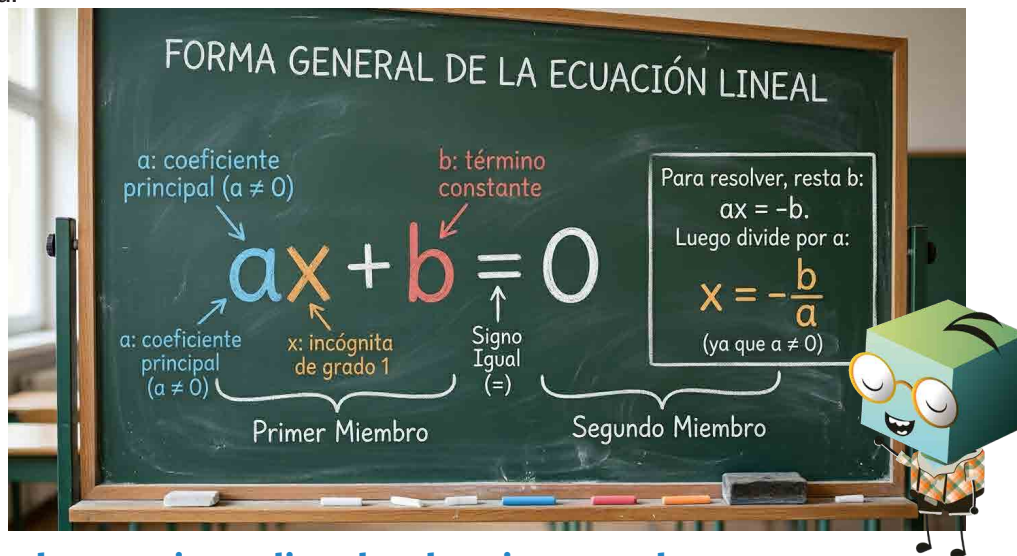
a y b representan números reales constantes, con la condición indispensable de que $a \neq 0$. El coeficiente a acompaña a la incógnita x , mientras que b constituye el término independiente.

La exigencia de que a sea distinto de cero garantiza la presencia efectiva de la incógnita en la ecuación; en caso contrario, la expresión degeneraría en una igualdad numérica sin variable.

La característica fundamental de una ecuación lineal de primer grado es la existencia de una solución única. Esta propiedad se deriva del hecho algebraico de que la ecuación puede reducirse a la forma:

$$x = \frac{a}{b}$$

El proceso de resolución consiste en la aplicación sucesiva de los principios de equivalencia: sumar o restar una misma cantidad en ambos miembros, y multiplicar o dividir ambos miembros por una misma cantidad distinta de cero. Estas operaciones preservan la igualdad y conducen al aislamiento progresivo de la incógnita.



Resolución de ecuaciones lineales de primer grado

La resolución de una ecuación lineal de primer grado constituye un proceso algorítmico fundamentado en las propiedades de la igualdad y en la aplicación ordenada de operaciones inversas. El objetivo primordial consiste en transformar la ecuación original, mediante pasos sucesivos que preservan la equivalencia matemática, hasta obtener una expresión de la forma $x = \frac{a}{b}$, donde x representa un número real que constituye la solución única del problema. La metodología para alcanzar este resultado no es arbitraria; sigue una jerarquía lógica que permite deshacer las operaciones que afectan a la incógnita en el orden contrario al que se construyó la expresión algebraica. El dominio de este procedimiento dota de una herramienta analítica para abordar problemas que involucran relaciones lineales en contextos científicos, económicos y cotidianos.

Principios fundamentales del despeje

La validez de cada transformación realizada durante la resolución descansa sobre dos pilares axiomáticos:

1. Principio de adición o sustracción.

Sumar o restar una misma cantidad en ambos miembros de una ecuación produce una ecuación equivalente. De manera algebraica es:

$$\text{Si } A = B, \text{ entonces } A \pm C = B \pm C.$$

2. Principio de multiplicación o división.

Multiplicar o dividir ambos miembros de una ecuación por una misma cantidad distinta de cero produce una ecuación equivalente. De forma algebraica es:

$$\text{Si } A = B, \text{ y } C \neq 0, \text{ entonces } A \cdot C = B \cdot C \text{ y } \frac{A}{C} = \frac{B}{C}.$$

Estos principios permiten trasladar términos de un miembro a otro (transposición) y eliminar coeficientes que acompañan a la incógnita.

Algoritmo general de resolución

La experiencia algebraica ha consolidado una secuencia óptima de pasos que minimiza errores y maximiza la eficiencia en la resolución de ecuaciones lineales. Se presentan a continuación dichos pasos:

Paso 1: Supresión de signos de agrupación.

Si la ecuación contiene paréntesis, corchetes o llaves, se procede a eliminarlos aplicando la propiedad distributiva o las reglas de los signos. La jerarquía de eliminación es de adentro hacia afuera.

Paso 2: Eliminación de denominadores.

Si la ecuación contiene fracciones, se calcula el mínimo común múltiplo de los denominadores y se multiplican todos los términos de la ecuación por dicho valor. Esta operación transforma la ecuación en otra equivalente con coeficientes enteros, facilitando su manipulación.

Paso 3: Reducción de términos semejantes en cada miembro.

Se agrupan y operan los términos que contienen la incógnita entre sí y los términos independientes entre sí, dentro del mismo miembro. El propósito es simplificar la expresión a una forma más manejable.

Paso 4: Transposición de términos.

Mediante el principio de adición o sustracción, se reubican los términos que contienen la incógnita en un miembro (por lo general el izquierdo) y los términos constantes en el miembro opuesto. Cada término que cambia de miembro lo hace con la operación inversa: si está sumando, pasa restando; si está restando, pasa sumando.

Paso 5: Reducción final de términos semejantes.

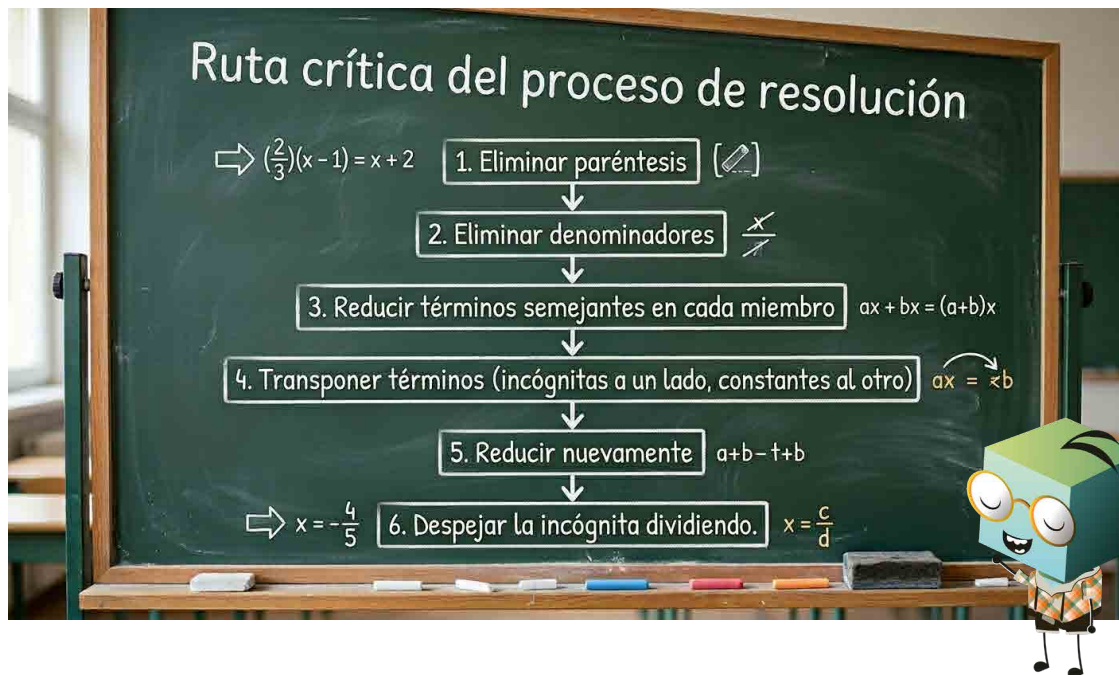
Se simplifican de nuevo ambos miembros tras la transposición, obteniendo una ecuación de la forma .

Paso 6: Despeje definitivo de la incógnita.

Se aplica el principio de multiplicación o división para aislar la incógnita. Se divide el término constante entre el coeficiente que acompaña a la variable.

Paso 7: Verificación.

Se sustituye el valor encontrado en la ecuación original. Si la igualdad se cumple, la solución es correcta.



Para comprender el algoritmo de la resolución de ecuaciones lineales de primer grado analiza el siguiente ejemplo:

Hallar el conjunto solución de la ecuación:

$$\frac{3x-1}{4} - \frac{2(x+1)}{3} = \frac{5}{6-x}$$

Aplicación del algoritmo:

Paso 1: Eliminación de denominadores.

Los denominadores presentes son 4, 3 y 6. El mínimo común múltiplo es 12. Se multiplican todos los términos por 12.

$$12 \cdot \left(\frac{3x-1}{4}\right) - 12 \cdot \left(\frac{2(x+1)}{3}\right) = 12 \cdot \left(\frac{5}{6}\right) - 12 \cdot x$$

Se simplifican los factores:

$$3 \cdot (3x-1) - 4 \cdot [2(x+1)] = 2 \cdot 5 - 12x$$

Paso 2: Eliminación de paréntesis (propiedad distributiva).

Se resuelven las multiplicaciones indicadas.

$$9x - 3 - 4 \cdot (2x + 2) = 10 - 12x$$

$$9x - 3 - 8x - 8 = 10 - 12x$$

Paso 3: Reducción de términos semejantes en el primer miembro.

Se operan los coeficientes de x y los términos constantes por separado.

$$(9x - 8x) + (-3 - 8) = 10 - 12x$$

$$x - 11 = 10 - 12x$$

Paso 4: Transposición de términos.

Se suman $12x$ en ambos miembros para agrupar las incógnitas a la izquierda.

$$x - 11 + 12x = 10 - 12x + 12x$$

$$13x - 11 = 10$$

Se suman 11 en ambos miembros para agrupar las constantes a la derecha.

$$13x - 11 + 11 = 10 + 11$$

$$13x = 21$$

Paso 5: Despeje de la incógnita.

Se dividen ambos miembros entre el coeficiente 13.

$$\frac{13x}{13} = \frac{21}{13}$$

$$x = \frac{21}{13}$$

Paso 6: Verificación.

Se sustituye $x = \frac{21}{13}$ en la ecuación original. Aunque el cálculo es laborioso, confirma la igualdad. Para una comprobación práctica, se puede usar un valor decimal aproximado ($x \approx 1.615$) y verificar que ambos miembros se aproximan al mismo valor.

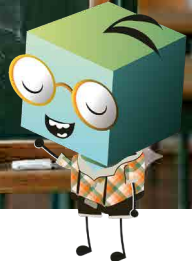
Aplicación visual del MCM en la ecuación del ejemplo

$$\left(\frac{2}{3}\right)(x-1) = x+2 \quad \times 12$$

Pasos detallados de la multiplicación (MCM=12)

1er Miembro: $\left(\frac{2}{3}\right)(x-1)$	2do Miembro: $x+2$
Multiplicar todo por 12:	Multiplicar todo por 12:
$\cancel{12} \cdot \left(\frac{2}{\cancel{3}}\right)(x-1)$ <small>$3=3*1$</small>	$12 \cdot (x+2)$
$= \underset{4}{\cancel{4}} \cdot 2(x-1)$ <small>$12=3*4$</small>	Se distribuye el 12:
$= 8(x-1) = 8x - 8$	$12x + 12 \cdot 2$
	$12x + 24$

ECUACIÓN TRANSFORMADA FINAL

$$8x - 8 = 12x + 24$$


Cuando las ecuaciones presentan corchetes o llaves, la estrategia de resolución mantiene la misma lógica, pero se añade una capa de complejidad en la simplificación inicial. Por ejemplo:

$$\text{Resolver } 3 [2x - (x - 4)] + 2 = 5x + 8$$

Solución:

1. Eliminar el paréntesis interior:

$$3 [2x - x + 4] + 2 = 5x + 8$$

2. Simplificar dentro del corchete:

$$3 [x + 4] + 2 = 5x + 8$$

3. Distribuir el 3:

$$3x + 12 + 2 = 5x + 8$$

4. Reducir términos:

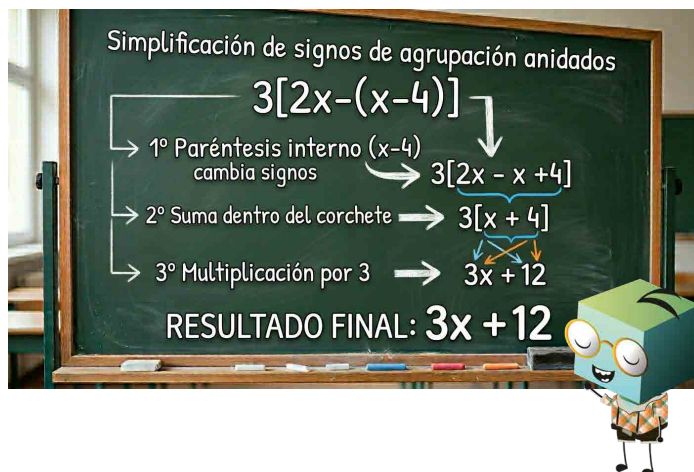
$$3x + 14 = 5x + 8$$

5. Transponer:

$$\text{Restar } 3x \text{ y restar } 8 \rightarrow 14 - 8 = 5x - 3x \rightarrow 6 = 2x$$

6. Despejar:


$$x = 3$$



Práctica de aprendizaje No. 2

Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones lineales de primer grado, aplicando los pasos del algoritmo.

1. $7x + 13 = 4x - 5$



2. $5(y - 2) - 3(y + 1) = 2y - 9$

3. $\frac{2x + 1}{3} + \frac{3x - 2}{2} = \frac{5x}{6}$

4. $4 - [2 - 3(x - 2)] = 2x + 1$

5. $\frac{x - 3}{4} - \frac{2x + 1}{5} = \frac{1 - x}{2}$

Forma estándar de las ecuaciones lineales

La representación algebraica de una ecuación lineal de primer grado con una incógnita admite diversas configuraciones según la disposición de sus términos. Entre estas configuraciones, la denominada forma estándar o forma canónica ocupa un lugar preeminente por su utilidad metodológica y su capacidad para uniformizar el análisis matemático. La forma estándar de una ecuación lineal de primer grado con una incógnita se define como la expresión:

$$ax + b = 0$$

En esta estructura, x representa la incógnita, a es un número real distinto de cero denominado coeficiente principal, y b es un número real cualquiera llamado término constante o término independiente. La condición $a \neq 0$ resulta indispensable para preservar el carácter lineal y la presencia efectiva de la variable; si a fuese igual a cero, la ecuación degeneraría en una afirmación numérica $b=0$, la cual carece de incógnita y, por ende, de solución en el sentido algebraico tradicional.

La adopción de la forma estándar ofrece ventajas significativas en el estudio sistemático de las ecuaciones. En primer lugar, proporciona un formato unificado que facilita la comparación entre distintas ecuaciones. En segundo lugar, permite la aplicación directa de una fórmula general para la solución: $x = -b/a$. En tercer lugar, constituye el punto de partida para el análisis de propiedades como la existencia y unicidad de la solución, así como para la extensión del concepto a ecuaciones lineales en dos variables ($Ax + By + C = 0$) en el ámbito de la geometría analítica.

Componentes de la forma estándar

La estructura contiene los siguientes elementos identificables:

- ➔ **Primer miembro.** Expresión algebraica que contiene la incógnita y el término constante.
- ➔ **Segundo miembro.** Valor nulo al que se iguala la expresión.
- ➔ **Coeficiente.** Factor numérico que multiplica a la incógnita. Su signo puede ser positivo o negativo.
- ➔ **Término constante.** Valor numérico independiente de la incógnita. Puede ser positivo, negativo o cero.

Transformación a la forma estándar

Las ecuaciones lineales aparecen con frecuencia en configuraciones que no corresponden de manera inmediata a la forma $ax + b = 0$. Para llevarlas a esta representación canónica, se aplican los principios de equivalencia y las operaciones algebraicas básicas con un objetivo claro: trasladar todos los términos no nulos al primer miembro y reducir la expresión resultante hasta obtener la estructura deseada. El procedimiento general se sintetiza en los siguientes pasos:

1. **Transposición inicial.** Mediante sumas o restas, se trasladan todos los términos del segundo miembro al primer miembro, dejando el segundo miembro igual a cero.
2. **Eliminación de signos de agrupación.** Se suprimen paréntesis, corchetes o llaves aplicando la propiedad distributiva o las reglas de los signos.
3. **Reducción de términos semejantes.** Se agrupan los términos que contienen la incógnita y los términos constantes por separado, operando sus coeficientes.
4. **Ordenamiento final.** Se escribe la expresión en el orden $ax + b = 0$, donde a y b son números reales simplificados.

Este proceso no altera el conjunto solución de la ecuación original; solo modifica su apariencia externa para adecuarla a un formato estandarizado. Por ejemplo:

Expresar en forma estándar la ecuación $7x - 12 = 3x + 8$ y, a partir de ella, encontrar la solución.

Paso 1. Transposición de todos los términos al primer miembro.

Se resta $3x$ y se resta 8 en ambos lados:

$$7x - 12 - 3x - 8 = 0$$

Paso 2: Reducción de términos semejantes.

Se agrupan los términos con x y los términos constantes:

$$(7x - 3x) + (-12 - 8) = 0$$

$$4x - 20 = 0$$

La ecuación se encuentra en forma estándar, con $a = 4$ y $b = -20$.

Paso 3: Obtención de la solución a partir de la forma estándar.

Se aplica la fórmula general $x = \frac{-b}{a}$:

$$x = \frac{-(-20)}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

Verificación: Sustituyendo $x = 5$ en la ecuación original:

$$7(5) - 12 = 35 - 12 = 23; 3(5) + 8 = 15 + 8 = 23$$

La igualdad se cumple.



El siguiente ejemplo muestra la transformación con paréntesis y fracciones.

Llevar a la forma estándar la ecuación $\frac{2(x-3)}{5} = \frac{3x-1}{2-4}$ y determinar su solución.

Paso 1: Eliminación de denominadores.

El mínimo común múltiplo de 5 y 2 es 10 . Se multiplican todos los términos por 10 :

$$10 \cdot \frac{2(x-3)}{5} = 10 \cdot \frac{3x-1}{2-10 \cdot 4}$$

$$2 \cdot 2(x-3) = 5(3x-1) - 40$$

$$4(x-3) = 5(3x-1) - 40$$

Paso 2: Eliminación de paréntesis.

Se aplica la propiedad distributiva:

$$4x - 12 = 15x + 5 - 40$$

$$4x - 12 = 15x - 35$$

Paso 3: Transposición al primer miembro.

Se resta 15x y se suma 35 en ambos lados:

$$4x - 12 - 15x + 35 = 0$$

Paso 4: Reducción de términos semejantes.

$$(4x - 15x) + (-12 + 35) = 0$$

$$-11x + 23 = 0$$

La forma estándar obtenida es $-11x + 23 = 0$, donde $a = -11$ y $b = 23$.

Paso 5: Cálculo de la solución.

$$x = \frac{-b}{a} = \frac{-23}{-11} = \frac{23}{11}$$

Verificación (opcional, con valor decimal aproximado): $x \approx 2.0909$.

■ Primer miembro:

$$\frac{2(2.09093)}{5} = \frac{2(-0.9091)}{5} = \frac{-1.8182}{5} = -0.36364.$$

■ Segundo miembro:

$$\frac{3(2.0909) + 1}{2 - 4} = \frac{6.2727 + 1}{2 - 4} = \frac{7.2727}{2 - 4} = 3.63635 - 4 = -0.36365.$$

Los valores coinciden dentro del margen de redondeo.

Diagrama de un libro que muestra los pasos para resolver una ecuación fraccionaria:

$$\frac{3(x-5)}{2} - \frac{4(2x-3)}{3} = \frac{7}{6}$$

1 PASO 1 1. Multiplicación por MCM (mínimo común múltiplo, MCM=6): Se multiplican todos los términos por 6 para eliminar los denominadores.

$$9(x-5) - 8(2x-3) = 7 \otimes 6$$

2 PASO 2 2. Desarrollo de paréntesis y transposición: Se aplica la propiedad distributiva y se mueven todos los términos a un lado de la ecuación.

$$9x - 45 - 16x + 24 - 7 = 0$$

3 PASO 3 3. Reducción final: Se combinan términos semejantes y constantes para llegar a la forma estándar.

$$-11x + 23 = 0$$

Relación entre la forma estándar y la solución

La expresión $ax + b = 0$ condensa en su estructura la solución de la ecuación. El despeje formal de la incógnita se realiza sumando $-b$ en ambos miembros y después dividiendo entre a :

$$ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -b/a$$

Esta relación pone de manifiesto que la solución existe y es única para cualquier valor de $a \neq 0$ y b real. Constituye, por tanto, una fórmula de aplicación inmediata una vez que la ecuación ha sido reducida a su forma canónica.

Diagrama de flujo que muestra el proceso de despeje de la ecuación $ax + b = 0$:

$$ax + b = 0 \xrightarrow{\text{Restar } b} ax = -b \xrightarrow{\text{Dividir entre } a} x = \frac{-b}{a}$$

Ejemplo numérico: $3x + 6 = 0 \rightarrow x = \frac{-6}{3} = -2$



Práctica de aprendizaje



Convierte cada una de las siguientes ecuaciones a la forma estándar $ax + b = 0$. Determina los valores de a y b , y encuentra la solución aplicando $x = -b/a$. Verifica tus resultados.

1. $9x - 15 = 4x + 20$

2. $3(2y - 1) = 5y + 7$

3. $\frac{4x + 3}{2} - \frac{x - 1}{3} = 5$

4. $2[5 - 3(z + 2)] = 4z - 10$

5. $6m - 2(3m + 1) = 4m - (2m + 2)$



Cierre

Las ecuaciones lineales de primer grado constituyen una herramienta matemática de notable versatilidad para la modelación y resolución de problemas en una amplia gama de disciplinas y situaciones cotidianas. La estructura fundamental $ax + b = 0$, o su equivalente en forma desarrollada, permite representar relaciones de proporcionalidad directa, equilibrio entre cantidades y variación constante entre magnitudes. La capacidad para traducir un enunciado verbal o una descripción contextual a una expresión algebraica lineal, es una competencia fundamental en la formación matemática, pues habilita abordar problemas concretos mediante un razonamiento estructurado y sistemático.

El proceso de modelación mediante ecuaciones lineales sigue una secuencia lógica bien definida, comienza con la comprensión profunda del problema, continúa con la identificación de la incógnita y de las relaciones existentes entre los datos, y culmina con el planteamiento y resolución de la ecuación. Por último, se cierra con la interpretación del resultado dentro del contexto original, lo que permite verificar su pertenencia y significado.

Contextos de aplicación y ejemplos representativos

Contexto financiero y comercial

En el ámbito de las finanzas personales y las transacciones comerciales, las ecuaciones lineales resultan útiles para determinar precios, calcular presupuestos, analizar ganancias o pérdidas y distribuir recursos. Las relaciones entre costo fijo, costo variable unitario e ingreso total se prestan de manera natural a una modelación lineal.

Ejemplo: Una empresa de alquiler de bicicletas cobra una tarifa fija de \$250 por el uso del casco y un seguro básico, más un costo de \$120 por cada hora de uso de la bicicleta. Si un cliente paga un total de \$1090 por un alquiler, ¿durante cuántas horas utilizó la bicicleta?

Planteamiento:

Sea h la cantidad de horas de uso. La relación se expresa como:

$$250 + 120h = 1090$$

Resolución:

Se resta 250 en ambos miembros: $120h = 840$.

Se divide entre 120: $h = 7$.

Interpretación:

El cliente utilizó la bicicleta durante 7 horas.

Contexto geométrico

La geometría elemental ofrece múltiples escenarios donde las propiedades de las figuras (perímetros, áreas, ángulos) se expresan mediante ecuaciones lineales. Las relaciones de complementariedad, suplementariedad o igualdad de longitudes conducen a ecuaciones de primer grado.

Ejemplo: En un triángulo, el segundo ángulo mide el doble que el primero, y el tercer ángulo mide 30° más que el primero. Sabiendo que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° , determinar la medida de cada ángulo.

Planteamiento:

Sea x la medida del primer ángulo. Entonces, el segundo mide $2x$ y el tercero mide $x + 30$. La ecuación que modela la situación es:

$$x + 2x + (x + 30) = 180$$

Resolución:

Se reducen términos semejantes: $4x + 30 = 180$. Se resta 30: $4x = 150$.

Se divide entre 4: $x = 37.5$.

Interpretación:

Los ángulos miden 37.5° , 75° y 67.5° de forma respectiva.



Contexto de mezclas y concentraciones

En química, farmacia o cocina, la preparación de mezclas con una concentración deseada a partir de soluciones de diferentes concentraciones se resuelve mediante ecuaciones lineales. El principio de conservación de la cantidad de soluto proporciona la igualdad fundamental.

Ejemplo: Un laboratorio dispone de una solución salina al 20 % de concentración y otra al 5 %. ¿Qué cantidad de cada solución debe mezclarse para obtener 300 mililitros de una solución al 12 % de concentración?

Planteamiento:

Sea x la cantidad en mililitros de la solución al 20 %. Entonces, la cantidad de solución al 5 % será $300 - x$. La cantidad de soluto en la mezcla final debe ser igual a la suma de las cantidades de soluto en las soluciones iniciales:

$$0.20x + 0.05(300 - x) = 0.12(300)$$

Resolución:

Se multiplica y simplifica: $0.20x + 15 - 0.05x = 36$. Se reducen términos: $0.15x + 15 = 36$. Se resta 15: $0.15x = 21$. Se divide entre 0.15: $x = 140$.

Interpretación:

Se deben mezclar 140 ml de solución al 20 % con 160 ml de solución al 5 %.

Contexto de movimiento uniforme

En física, el movimiento rectilíneo uniforme se describe mediante la relación lineal $d=vt$, donde la distancia recorrida es directamente proporcional al tiempo. Problemas que involucran encuentros, alcances o diferencias de velocidad se traducen en ecuaciones lineales.

Ejemplo: Dos ciclistas parten de forma simultánea desde dos ciudades A y B, separadas por 150 kilómetros, y viajan por la misma carretera en sentidos opuestos. El ciclista que sale de A mantiene una velocidad constante de 20 km/h, mientras que el que sale de B viaja a 25 km/h. ¿A qué distancia de la ciudad A se encontrarán?

Planteamiento:

Sea t el tiempo en horas que transcurre hasta el encuentro. La distancia recorrida por el primer ciclista es $20t$, y por el segundo, $25t$. La suma de ambas distancias debe igualar la separación inicial:

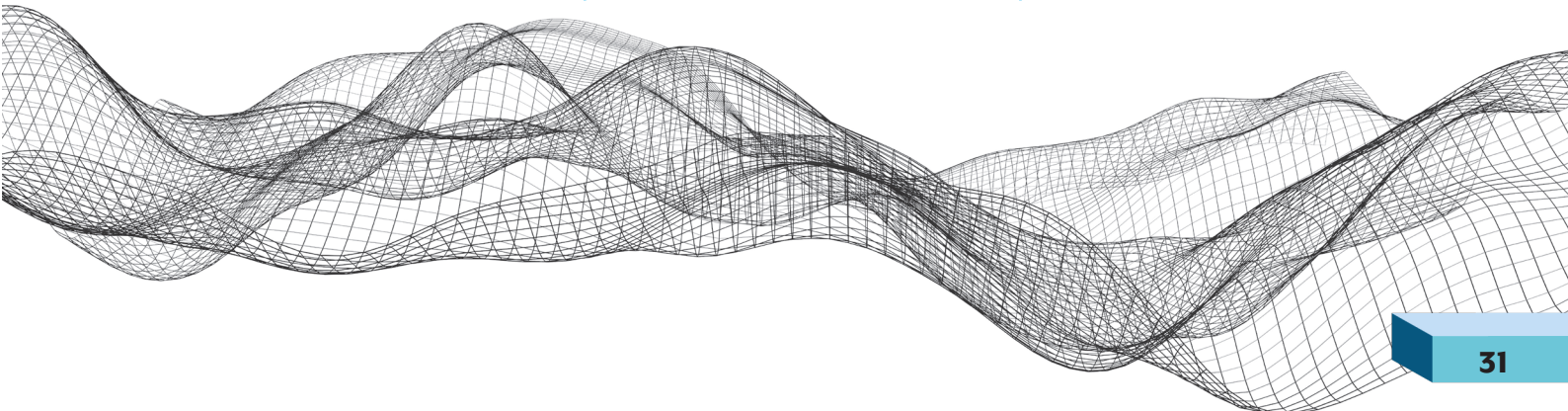
$$20t + 25t = 150$$

Resolución:

Se reducen términos: $45t = 150$. Se divide entre 45: $t = 150/45 = 10/3$ horas.
La distancia desde A es: $20 \times 10/3 = 200/3 \approx 66.67$ km.

Interpretación:

El encuentro se produce aproximadamente 66.67 kilómetros de la ciudad A.



Contexto de edades y relaciones temporales

Los problemas que involucran edades presentes, pasadas o futuras y las relaciones entre ellas constituyen una aplicación clásica de las ecuaciones lineales. La clave reside en establecer la igualdad a partir de la información proporcionada sobre diferencias de edad o múltiplos.

Ejemplo: La edad actual de un padre es el triple de la edad de su hijo. Dentro de 12 años, la edad del padre será el doble de la edad del hijo. ¿Cuáles son sus edades actuales?

Planteamiento:

Sea x la edad actual del hijo. La edad actual del padre es $3x$. Dentro de 12 años, la edad del hijo será $x + 12$ y la del padre será $3x + 12$. La condición futura se expresa como:

$$3x + 12 = 2(x + 12)$$

Resolución:

Se distribuye el 2: $3x + 12 = 2x + 24$.
Se resta $2x$: $x + 12 = 24$. Se resta
 12 : $x = 12$.

Interpretación:

El hijo tiene 12 años y el padre tiene 36 años.

Del lenguaje natural al lenguaje algebraico


La traducción de un problema contextual a una ecuación lineal exige una lectura comprensiva y la identificación de ciertos indicadores lingüísticos que sugieren operaciones matemáticas. Expresiones como “más que”, “menos que”, “el doble de”, “la mitad de”, “excede en”, “es igual a”, “resulta”, “totaliza” orientan la construcción de la expresión algebraica. La práctica sistemática en la resolución de problemas diversos fortalece la habilidad para reconocer patrones y seleccionar la estrategia de modelación más adecuada.



Práctica de aprendizaje

A continuación se presentan cinco problemas contextualizados que requieren el planteamiento y resolución de ecuaciones lineales de primer grado. Se recomienda seguir el esquema: lectura comprensiva, identificación de la incógnita, planteamiento de la ecuación, resolución algebraica y verificación de la coherencia del resultado en el contexto.

1. Ana recibe un pago mensual fijo de \$8 000 por su trabajo, más una comisión de \$150 por cada producto que vende. En un determinado mes, sus ingresos totales ascendieron a \$12 500. ¿Cuántos productos vendió ese mes?



2. El perímetro de un rectángulo es 64 centímetros. La base mide 6 centímetros más que la altura. Calcula las dimensiones del rectángulo.

3. Un comerciante desea mezclar café de \$180 el kilogramo con café de \$120 el kilogramo para obtener 50 kilogramos de una mezcla que pueda vender a \$156 el kilogramo. ¿Qué cantidad de cada tipo de café debe utilizar?

4. Un tren de pasajeros sale de la estación A hacia la estación B a una velocidad constante de 90 km/h. Una hora después, un tren de carga sale de la estación B hacia la estación A a una velocidad de 60 km/h. La distancia entre ambas estaciones es de 450 kilómetros. ¿A qué distancia de la estación A se cruzarán los dos trenes?

5. En la actualidad, María tiene 24 años más que su hija Lucía. Hace 10 años, la edad de María era el triple de la edad de Lucía. ¿Cuáles son sus edades actuales?



Evaluación formativa

Responde los siguientes cuestionamientos.

1. ¿Cómo explico con mis propias palabras qué es una ecuación lineal?

2. ¿Cómo identifico las partes de una ecuación lineal?

3. ¿Cómo resuelvo una ecuación lineal paso a paso?

4. ¿Cómo verifico que mi solución es correcta?

5. ¿Cómo transformo una ecuación a su forma estándar ($ax + b = 0$)?

6. ¿Cómo interpreto los coeficientes en la forma estándar?

Autoevalúa los aprendizajes del propósito formativo con la siguiente rúbrica.

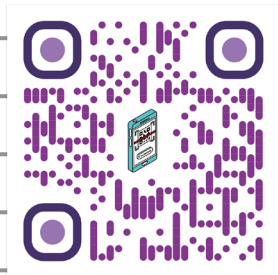
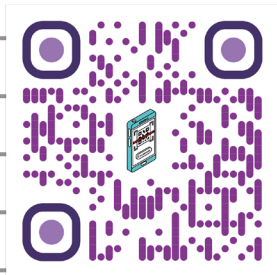
Criterio	Nivel inicial (1 pt.)	Nivel intermedio (2 pts.)	Nivel avanzado (3 pts.)
Comprendo y explico el concepto y las partes de una ecuación lineal	Identifico que una ecuación tiene números y letras, pero me cuesta explicar sus partes o su significado.	Explico qué es una ecuación, identifico incógnita, términos y operaciones básicas.	Analizo la estructura de una ecuación lineal, explico cada parte (términos, coeficientes, igualdad) y relaciono su forma con su interpretación algebraica.
Resuelvo ecuaciones lineales de primer grado aplicando procedimientos adecuados	Me cuesta despejar la incógnita o cometo errores en los pasos.	Resuelvo ecuaciones lineales simples aplicando operaciones inversas de forma ordenada.	Resuelvo ecuaciones lineales con precisión, justifico cada paso, verifico resultados y explico el procedimiento con claridad.
Explico y utilizo la forma estándar de las ecuaciones lineales	Reconozco la forma estándar, pero no sé cómo aplicarla.	Explico la forma estándar ($ax + b = 0$) y transformo ecuaciones simples a esta forma.	Analizo ecuaciones más complejas, las convierto a forma estándar, interpreto coeficientes y explico cómo esta forma facilita la resolución.



Práctica transversal



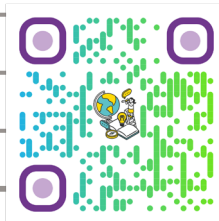
Para la práctica transversal debes utilizar los conocimientos desarrollados en el propósito formativo uno y las habilidades en el uso de las Tecnologías de la Información, Comunicación, Conocimiento y Aprendizaje Digital para resolver las actividades interactivas que se encuentran en los siguientes enlaces o códigos QR.



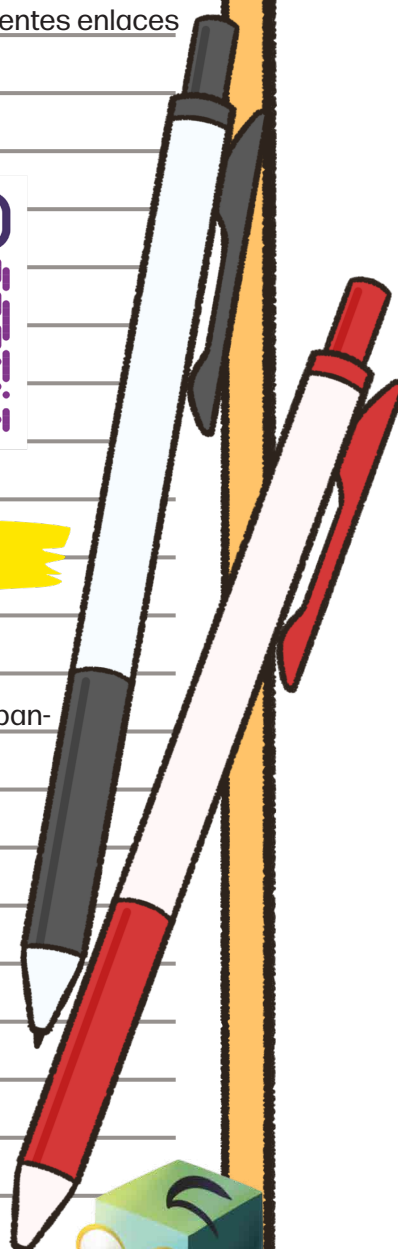
¡Escanéame!

¡Escanéame!

Al completar cada uno de los ejercicios, realiza una captura de pantalla que debes enviar por correo electrónico a tu maestra(o).



¡Paec





Pensamiento matemático 3

Pensamiento algebraico e introducción a geometría plana



La Editorial Planea tiene como misión crear materiales didácticos de calidad, con los contenidos adecuados para impactar positivamente en la formación de los estudiantes, desarrollando sus conocimientos, habilidades y actitudes, que los transformen en jóvenes capaces de comprender su entorno e influir en él, aprender de manera autónoma a largo de su vida, ser conscientes de sus destrezas para resolver problemas y aceptar retos que lo ayuden a alcanzar sus metas, ser sensibles al arte y sus expresiones, asimismo activar la participación ciudadana que reafirme su conciencia cívica y ética, fomentando una actitud respetuosa a la interculturalidad, diversidad de creencias, valores e ideas, asumiendo un pensamiento crítico que ayude al desarrollo sustentable de su comunidad.

El libro de **Pensamiento matemático 3. Pensamiento algebraico e introducción a geometría plana**, está desarrollado bajo los Principios de la Nueva Escuela Mexicana, teniendo como eje rector el Nuevo Modelo Educativo de la Educación Media Superior y el programa de estudio por propósitos y contenidos formativos, el cual propone la siguiente meta de aprendizaje:

- Aplique el lenguaje algebraico como herramienta para describir situaciones de la realidad y expresar relaciones matemáticas, y mediante procesos de intuición y razonamiento, logre explicar y resolver problemas.

En la Editorial Planea tenemos un compromiso por desarrollar materiales que cumplan con las expectativas de las comunidades educativas.

Titulos relacionados

