

Temas selectos de matemáticas 2

René Pérez Moreno



...salvadores y salvadas de
El Salvador, Honduras y Ecuador,
principalmente, quienes ingresa-
ron nadando por el río Bravo.
En territorio texano, los mi-

...pueda crimina-
lmente arbitrar
Los ciudadanos
religiosos, pide

...os
...sin
...a ge-
...a generado
...idad por
...antes en
...z Pérez
...migración
...nos está re-
...un tema que
...ar ni actuar de
...contra ellos".
...s de Ahumada,
...agrupaciones
...n a los maqui-
...bajaran lo
...entre
...wir
...os
...Mex

"Proyecta tu futuro"



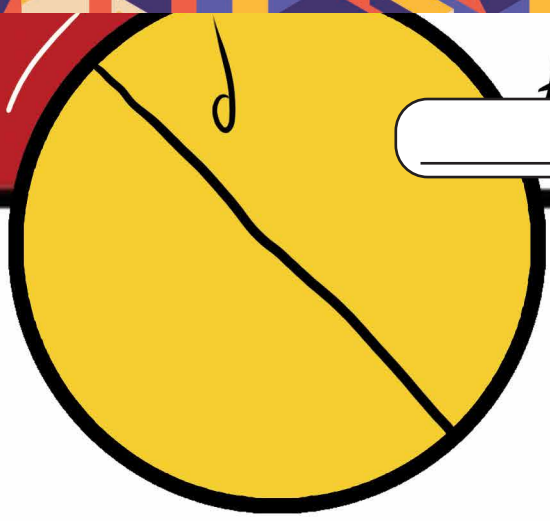
BT



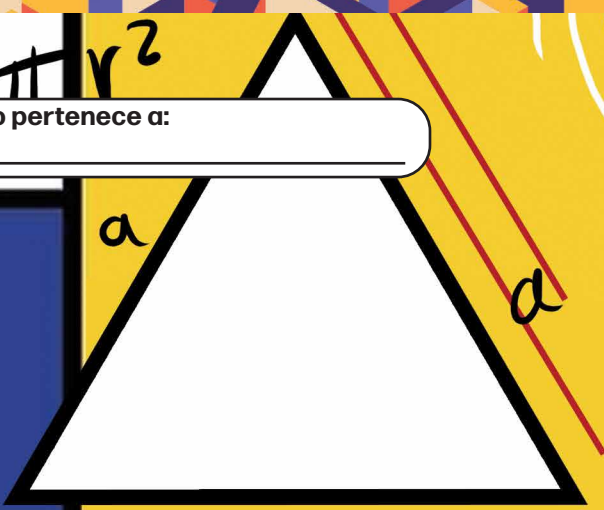
dierno
ncia

$$A = \pi r^2$$

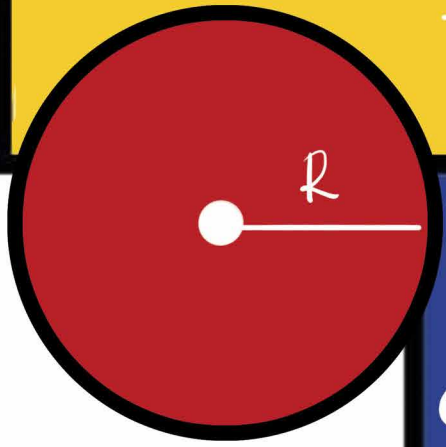
Este libro pertenece a:



$$A = bn$$

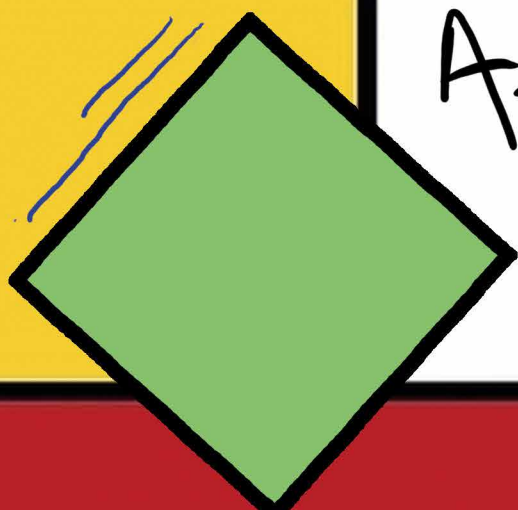


$$a$$



$$A = \frac{1}{2}bh$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$



$$C = 2\pi r$$





Primera Edición 2025

Copyright © Editorial Planea

ISBN: *En trámite.*

Impreso en México

Contacto: 771-655-6186

Correo electrónico:

informes@editorialplanea.com.mx

Se reservan todos los derechos. Está prohibida la reproducción, almacenamiento en sistemas de recuperación o transmisión de estas publicaciones, ya sea de forma electrónica, mecánica, mediante fotocopia, grabación u otros medios, sin el consentimiento previo del editor. Esto incluye su distribución en redes, almacenamiento electrónico o transmisión para fines de aprendizaje a distancia.

Editor en jefe: Cosme Lorenzo Rodríguez

Autor: René Pérez Moreno

Correctora: Angélica Maria Alvarado Carreón

Diseño: Nasbbi Irazú Portes Loeza

Imágenes: Adobe Stock

Aviso de exención de responsabilidad:

Los enlaces incluidos en este libro no son propiedad de Editorial Planea, por lo que no se tiene control sobre la información proporcionada por los sitios web en un momento determinado, ni se puede garantizar la exactitud de la información proporcionada por terceros (enlaces externos). Aunque la información se recopila cuidadosamente y se actualiza de manera constante, no se asume responsabilidad alguna por su exactitud, integridad o actualidad.

Los artículos atribuidos a los autores reflejan sus opiniones y a menos que se indique específicamente, no representan las opiniones del editor. Además, la reproducción de este libro o cualquier material de los sitios web incluidos en él no está autorizada, ya que dicho material puede estar sujeto a derechos de propiedad intelectual.

Los derechos pertenecen a sus respectivos propietarios, y Editorial Planea no se hace responsable de la información mostrada en los enlaces proporcionados.



Presentación

La Editorial Planea tiene el compromiso de ofrecer materiales didácticos de alta calidad, alineados con el Nuevo Modelo Educativo de la Educación Media Superior, basado en la premisa de desarrollar en tu joven estudiante un aprendizaje situado en tu entorno, que te ayude en tu día a día, adaptándote a los cambios y brindarte un constante aprendizaje inclusivo, pluricultural, colaborativo y equitativo, basado en los principios de la Nueva Escuela Mexicana.

Este libro se encuentra apegado al 100 % al programa de estudio basado en progresiones de aprendizaje del NME de la EMS, abordando las categorías y subcategorías para lograr los aprendizajes meta que propone el programa de estudio para el Bachillerato Tecnológico para Temas Selectos de Matemáticas II.

Estas progresiones, se encuentran organizadas en tres unidades de aprendizaje, la primera aborda el “Plano, lugares y propiedades geométricas”, donde se analiza el plano cartesiano, los lugares, regiones y propiedades geométricas con respecto a las primeras tres progresiones; en la segunda unidad denominada “Movimientos en el plano” se deduce la ecuación de la recta, los modelos parabólicos, el movimiento circular y elíptico que corresponden a las progresiones cuatro a siete; finalmente en la tercera unidad de aprendizaje “Las cónicas y espirales”, donde se abordan las esferas de Dandelin, la traslación y rotación de cuerpos y las coordenadas polares e identidades trigonométricas de las progresiones ocho a la diez.

Este libro, diseñado para ti, trata ayudarte a comprender los conceptos, propiedades y relaciones clásicas de los objetos de estudio de la geometría analítica desde una perspectiva dinámica, a través de la consideración de los puntos de encuentro entre esta geometría, la mecánica clásica, la astronomía y otras ciencias que abrevan de ella.



La Nueva Escuela Mexicana NEM

La Nueva Escuela Mexicana (NEM) parte de un diagnóstico donde la educación se entendía como tres ciclos sin conexión, la educación básica (preescolar, primaria y secundaria), la educación media superior y la educación superior, con base en este diagnóstico se construye una propuesta donde la educación debe ser entendida para toda la vida, bajo el concepto de aprender a aprender, la actualización continua, adaptación a los cambios y el aprendizaje permanente.

La NEM propone un plan de 23 años en los diferentes niveles educativos, los cuales estén interconectados entre sí, donde se potencialice la formación integral de las niñas, niños, adolescentes y jóvenes con el objetivo de promover el aprendizaje de excelencia, inclusivo, pluricultural, colaborativo y equitativo a lo largo de su formación.

Para alcanzar el bienestar y la prosperidad incluyente, la NEM se fundamenta en los siguientes principios:



Fomento de la identidad con México. El amor a la patria, el aprecio por su cultura, el conocimiento de su historia y el compromiso de los valores plasmados en la Constitución Política, son las acciones que forman este principio.

Responsabilidad ciudadana. El principio implica la aceptación de derechos y deberes personales y comunes, el respeto por los valores cívicos por parte de los estudiantes formados en la NEM es esencial para transmitir los valores de honestidad, respeto, justicia, solidaridad, reciprocidad, lealtad, libertad, equidad y gratitud.



Honestidad. Se destaca este valor dentro de la responsabilidad social de los estudiantes, el cual permite formar una sociedad con base en la confianza y el sustento de la verdad de todas las acciones para permitir una sana relación entre los ciudadanos.

Respeto de la dignidad humana. Promover el respeto irrestricto a la dignidad y los derechos humanos de las personas, con base en la convicción de la igualdad de todos los individuos en derechos, trato y oportunidades.





Respeto por la naturaleza y cuidado del medio ambiente. La conciencia ambiental favorece la protección y conservación del medio ambiente, la prevención de la contaminación y cambio climático comienza con la educación del desarrollo sostenible.

Promoción de la interculturalidad. El aprecio y la comprensión por la diversidad cultural y lingüística, así como, el diálogo y el intercambio cultural es una fuerza motriz para tener una vida intelectual, afectiva, moral y espiritual.



Participación en la transformación de la sociedad. La superación de cada persona por iniciativa propia es la base de este principio, el sentido social de la educación permite construir relaciones cercanas, solidarias y fraternas que superan las indiferencias y la apatía por transformar la sociedad.

Promoción de la cultura de la paz. El objetivo de la agenda 2030 que promueve "Paz, justicia e instituciones sólidas", tiene como fundamento promover sociedades pacíficas, inclusivas, que faciliten el desarrollo sostenible, el acceso a la justicia para todos y la construcción a todos los niveles de instituciones eficaces e inclusivas que rindan cuentas.





Conoce tu libro

Dentro del libro se encuentra desarrollado el Nuevo Modelo Educativo de la Educación Media Superior, el cual se basa en un programa de estudio por progresiones de aprendizaje, las cuales se desarrollan en tres momentos que son:



Apertura. En este primer momento se busca despertar el interés y la motivación del estudiante por el tema que se va a abordar.



Cierre. En este último momento se busca consolidar los aprendizajes y hacer una evaluación del proceso.



Desarrollo. Se presenta el contenido y se realiza una explicación clara y detallada de los conceptos clave.



También se encuentran las secciones:

Evaluación diagnóstica. Se encuentra al inicio de cada unidad de aprendizaje, ayuda a identificar las fortalezas y debilidades con los temas que se van a abordar.

Aprendizaje situado en contextos:



Escuela



Aula



Comunidad



Prácticas transversales.

Donde se enlazan los aprendizajes de los recursos socio-cognitivos con las disciplinas de las áreas de conocimiento.

Prácticas socioemocionales.

El currículum ampliado se vincula con los recursos sociocognitivos, áreas de conocimiento por medio de los diferentes ámbitos de los recursos socioemocionales que están presentes en este tipo de actividades.





Prácticas de aprendizaje. La mejor manera de aplicar los conocimientos y habilidades aprendidas es a través de este tipo de prácticas, las cuales están numeradas, ubicadas en un contexto de aprendizaje y potencializando un principio de la NEM, como se muestra en el siguiente ejemplo:



Práctica de aprendizaje



Lectura NEM. Es una actividad de comprensión lectora que aborda uno de los principios de la Nueva Escuela Mexicana.



Evaluación de la unidad de aprendizaje. Son reactivos que abordan los temas de cada unidad de aprendizaje.

Categorías, subcategorías y metas de aprendizaje. Cada progresión tiene al inicio las categorías, subcategorías y metas de aprendizaje que aborda su contenido como se muestra a continuación:

Categorías de aprendizaje

Subcategoría de aprendizaje

C1 S1 S2
M1 M2

Metas de aprendizaje



Proyecto Aula - Escuela - Comunidad (PAEC). En estos códigos QR podrás realizar las actividades de las progresiones que son parte del PAEC.

Maestro Iso. Cada vez que veas al maestro Iso, él te explicará la progresión de manera dinámica, escaneando el código QR.



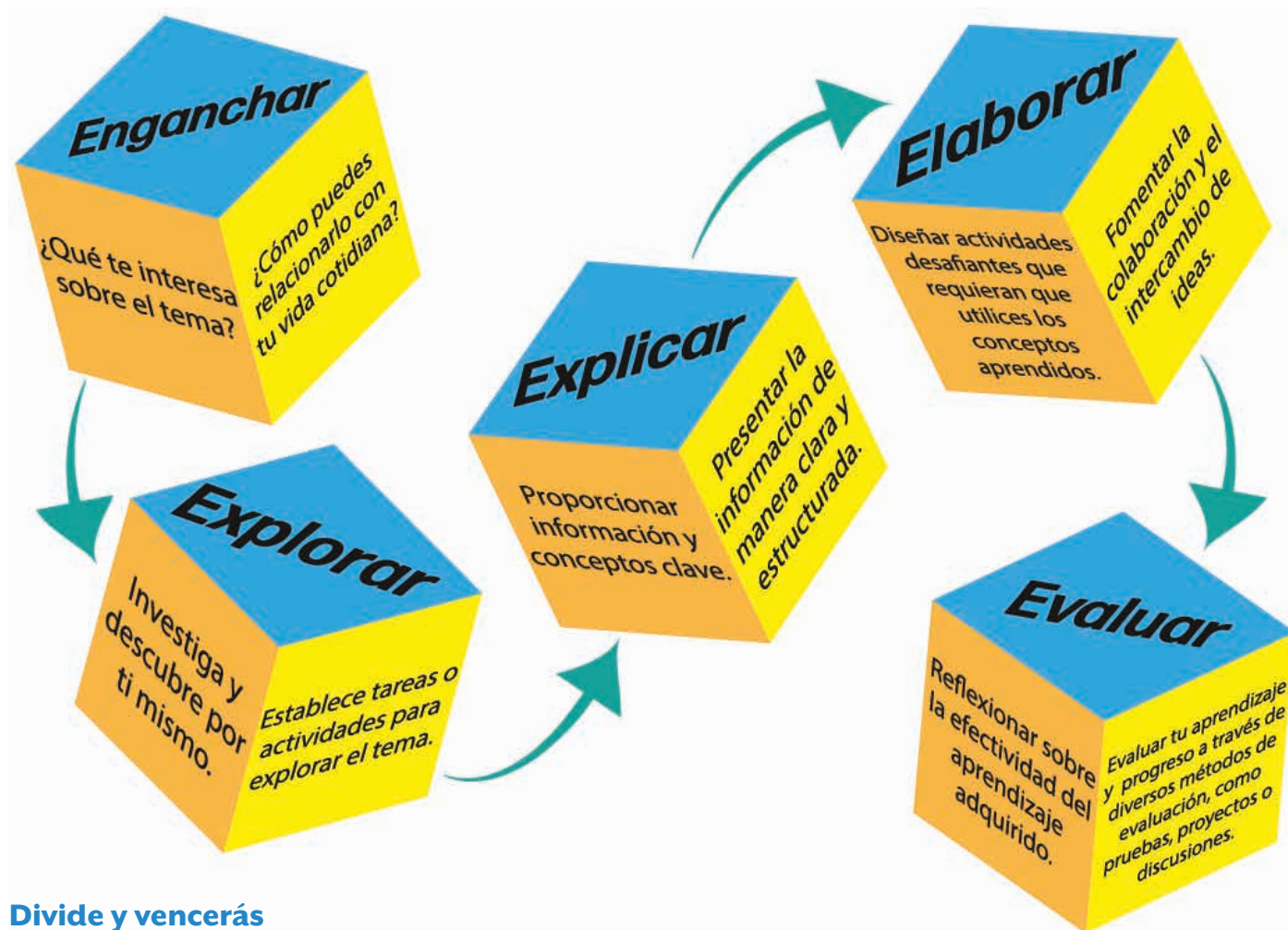
Progresiones de aprendizaje

1. Intuye la trayectoria de objetos que se mueven en dos dimensiones y las describe heurísticamente a través del uso de sistemas coordenados cartesianos. De ser posible empleando software como Tracker y GeoGebra que le permita rastrear el movimiento de dichos objetos.
2. Describe algebraicamente algunas trayectorias, lugares geométricos o regiones en el plano empleando ecuaciones e inecuaciones con dos incógnitas o relaciones de distancia y ángulo entre puntos y rectas del plano cartesiano.
3. Deduce propiedades geométricas (simetría, extensión, etc.) de curvas planas, a partir de sus expresiones algebraicas, considerando que polinomios de dos variables con coeficientes reales tienen un conjunto solución que puede graficarse en el plano cartesiano.
4. Emplea métodos gráficos para entender el comportamiento de dos variables que estén en relación de proporcionalidad directa para deducir la ecuación de la recta que pasa por el origen y posteriormente trabajar el caso general de una recta en el plano.
5. Analiza cuerpos en caída libre, tiros parabólicos como los descritos por las balas disparadas por cañones u otros fenómenos que involucren en su modelación funciones cuadráticas para deducir propiedades analíticas de la parábola.
6. Analiza el movimiento circular utilizando la ecuación de la circunferencia, medidas angulares y pensamiento variacional. Se consideran las implicaciones físicas de la conservación del momento angular.
7. Estudia el movimiento planetario utilizando las leyes de Kepler, pensamiento variacional, aspectos analíticos de la elipse y la coplanaridad de cuerpos que se mueven en el espacio.
8. Utiliza las esferas de Dandelin para identificar que las cónicas (incluyendo la hipérbola) se obtienen como el resultado de los cortes de un plano a un cono circular de doble hoja.
9. Considera movimientos del plano y cambios de coordenadas al usar traslaciones y rotaciones con el fin de simplificar la expresión analítica de curvas en el plano.
10. Utiliza coordenadas polares e identidades trigonométricas para lograr una descripción más económica de curvas que de ser descritas cartesianamente tendrían una expresión muy complicada, como por ejemplo, las espirales, cardioides, entre otras.

Estrategias para trabajo colaborativo

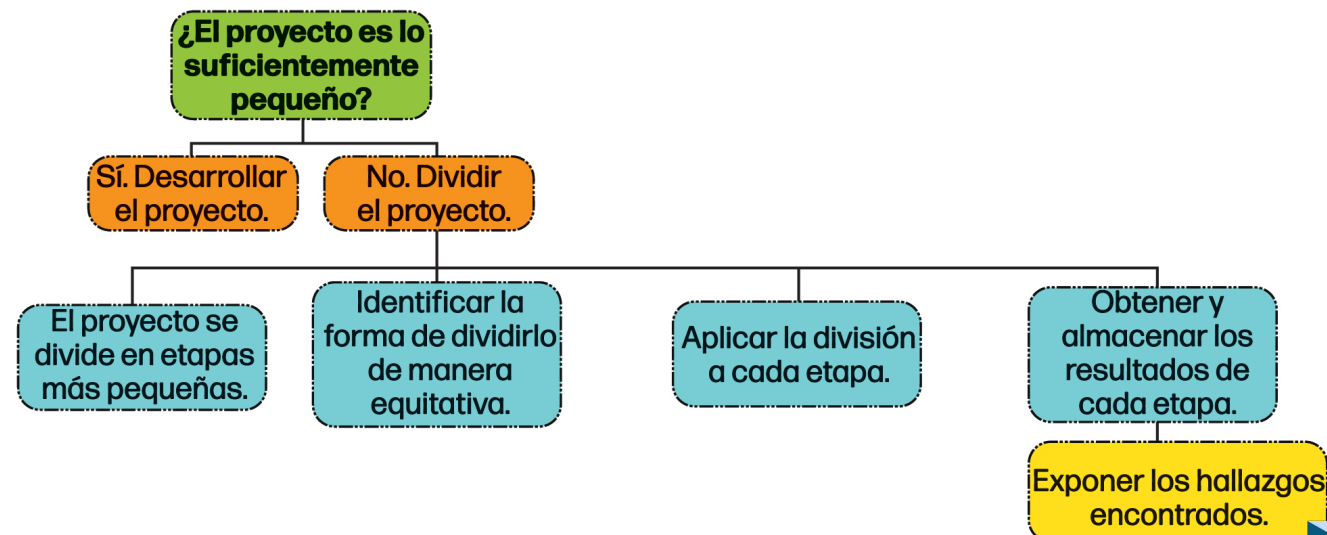
Estrategia 5E

Es una estrategia utilizada en educación para el trabajo colaborativo y diseño de proyectos, consiste en:



Divide y vencerás

Consiste en no ver un proyecto como una unidad, sino como una serie de etapas que pueden desarrollarse de manera individual para después integrar y exponer los hallazgos encontrados, a continuación se muestran los pasos a seguir.



Contenido

Unidad de aprendizaje 1. Plano, lugares y propiedades geométricas.

- Plano cartesiano
- Lugares y regiones geométricas
- Propiedades geométricas

Unidad de aprendizaje 2. Movimientos en el plano.

- Deducir la ecuación de la recta
- Modelos parabólicos de movimiento
- Movimiento circular
- Movimiento elíptico

Unidad de aprendizaje 3. Las cónicas y espirales

- Esferas de Dandelin
- Traslación y rotación de cuerpos
- Coordenadas polares e identidades trigonométricas



Unidad de aprendizaje **1**

Plano, lugares y propiedades geométricas

Categorías de aprendizaje:

■ **C1.** Procedural.

Subcategorías:

- **S1.** Elementos aritméticos - algebraicos.
- **S2.** Elementos geométricos.

■ **C2.** Procesos de intuición y razonamiento.

Subcategorías:

- **S1.** Capacidad para observar y conjeturar.
- **S2.** Pensamiento intuitivo.

■ **C3.** Solución de problemas y modelación.

Subcategorías:

- **S2.** Construcción de modelos.

■ **C4.** Interacción y lenguaje matemático.

Subcategorías:

- **S1.** Registro escrito, simbólico, algebraico e iconográfico.
- **S3.** Ambiente matemático e comunicación.

Meta de aprendizaje:

- **C1M1.** Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno.
- **C1M2.** Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del pensamiento matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto.
- **C2M1.** Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.
- **C2M2.** Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieran explicación o interpretación.
- **C3M2.** Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno.
- **C4M1.** Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.

Aprendizaje de trayectoria:

- Aplica procedimientos algorítmicos e interpreta sus resultados para anticipar, encontrar y validar soluciones a problemas matemáticos, de áreas del conocimiento y de su vida personal.
- Observa, intuye, conjetura y argumenta a favor o en contra de afirmaciones matemáticas tanto teóricas como de aplicación en áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos o recursos socioemocionales, para debatir y contrastar ideas con sus pares.
- Analiza situaciones y problemas, discerniendo las variables de interés para el estudio, así como también llevando a cabo la verificación requerida de las hipótesis para la aplicación de los objetos, métodos y conceptos matemáticos utilizados, con la finalidad de modelar fenómenos o resolver problemas.
- Describe, interpreta y comunica con claridad ideas, situaciones y fenómenos propios de la matemática, de las ciencias naturales, experimentales, de la tecnología, de las ciencias sociales y de su entorno, empleando un lenguaje matemático riguroso.

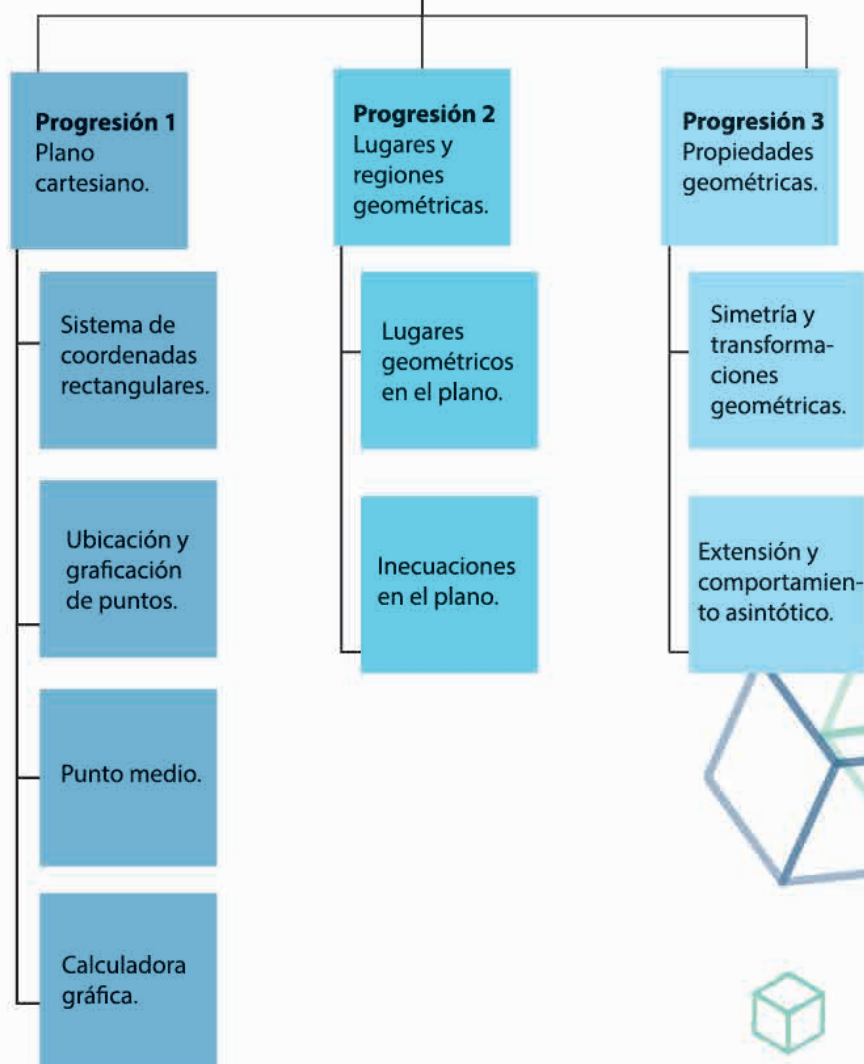
Progresiones:

1. Intuye la trayectoria de objetos que se mueven en dos dimensiones y las describe heurísticamente a través del uso de sistemas coordenados cartesianos. De ser posible empleando software como Tracker y GeoGebra que le permita rastrear el movimiento de dichos objetos.
2. Describe algebraicamente algunas trayectorias, lugares geométricos o regiones en el plano empleando ecuaciones e inecuaciones con dos incógnitas o relaciones de distancia y ángulo entre puntos y rectas del plano cartesiano.
3. Deduce propiedades geométricas (simetría, extensión, etcétera) de curvas planas, a partir de sus expresiones algebraicas, considerando que polinomios de dos variables con coeficientes reales tienen un conjunto solución que puede graficarse en el plano cartesiano.

Presentación

En la primera unidad del libro de Temas Selectos de Matemáticas II, se desarrolla el contenido de las primeras tres progresiones de aprendizaje del programa de estudios para Bachillerato Tecnológico, la unidad se denomina “Plano, lugares y propiedades geométricas”, donde se desarrolla los contenidos del plano cartesiano auxiliado de aplicaciones informáticas que ayudan a una comprensión y simulación de fenómenos, asimismo la conceptualización de lugares y regiones geométricas, donde se pueden analizar las ecuaciones e inecuaciones que se representan en el plano cartesiano. La tercera progresión esta definida con el tema de propiedades geométricas donde se analizan desde el contexto de la geometría analítica la simetría y transformaciones geométricas. Los contenidos específicos de la unidad se encuentran en el siguiente esquema.

Unidad de aprendizaje 1. Plano, lugares y propiedades geométricas.

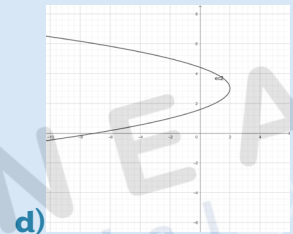
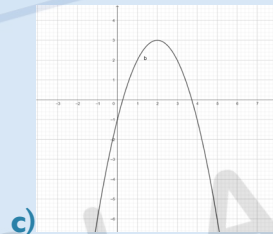
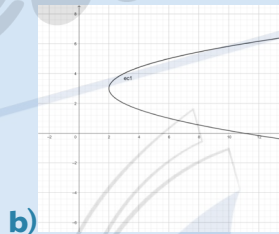
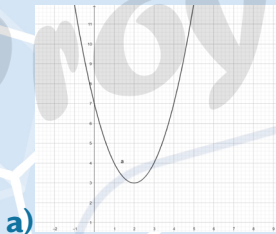




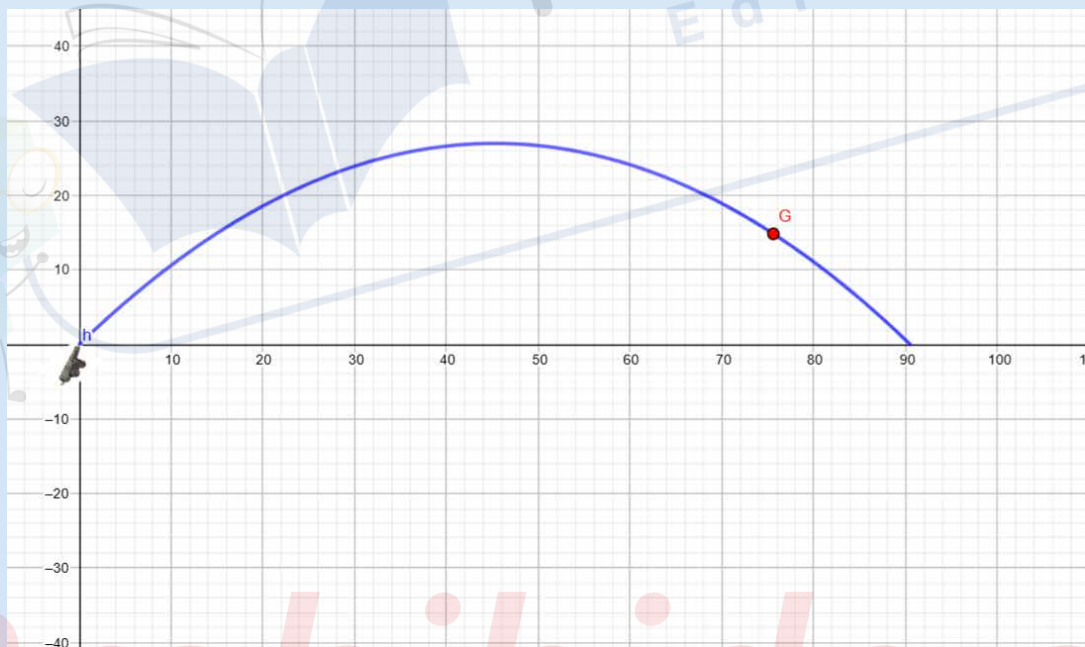
Evaluación diagnóstica

Subraya la respuesta correcta.

1. Un objeto se mueve en el plano cartesiano siguiendo una trayectoria parabólica. ¿Cuál de las siguientes gráficas representa mejor este movimiento si su vértice está en $(2, 3)$ y abre hacia abajo?



2. Al rastrear el movimiento de un proyectil con Tracker, se obtiene una gráfica como la siguiente:



¿Qué tipo de ecuación describe mejor esta trayectoria?

- a) Lineal ($y = mx + b$)
b) Cuadrática ($y = ax^2 + bx + c$)
c) Cúbica ($y = ax^3 + bx^2 + cx + d$)
d) Circular ($x^2 + y^2 = r^2$)
3. ¿Cuál es la ecuación de una circunferencia con centro en $(-1, 4)$ y radio 3 unidades?
- a) $x^2 + y^2 = 9$
b) $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 9$
c) $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 3$
d) $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 9$

4. La desigualdad ($y \leq 2x + 5$) representa:

- a) Una recta con pendiente 2 y todos los puntos por debajo de ella.
- b) Una recta con pendiente 2 y todos los puntos por encima de ella.
- c) Una parábola que abre hacia arriba.
- d) Una circunferencia de radio 5.

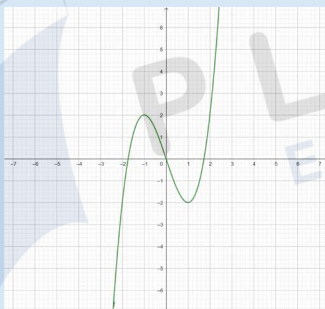
5. ¿Qué ecuación representa el conjunto de puntos equidistantes al punto $(3, -2)$?

- a) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = r^2$
- b) $y = -2x + 3$
- c) $x + y = 1$
- d) $3x - 2y = 0$

6. Dada la ecuación $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$, ¿cuál es su centro y radio?

- a) Centro $(6, -4)$, radio $\sqrt{3}$
- b) Centro $(0, 0)$, radio 6
- c) Centro $(3, -2)$, radio 4
- d) Centro $(-3, 2)$, radio 3

7. La gráfica de $y = x^3 - 3x$ tiene:



- a) Simetría respecto al origen.
- b) Simetría respecto al eje Y.
- c) Simetría respecto al eje X.
- d) No tiene simetría.

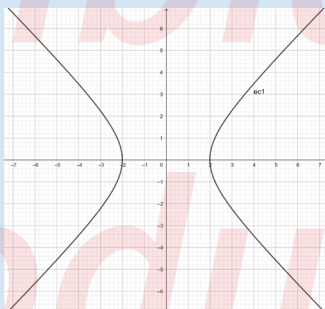
8. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones corresponde a una elipse horizontal?

- a) $y = x^2 - 1$
- b) $x^2 + y^2 = 25$
- c) $y = \frac{1}{x}$
- d) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

9. La ecuación $y = |x|$ tiene:

- a) Una asíntota vertical en $\{x = 0\}$.
- b) Simetría respecto al eje $\{y\}$.
- c) Un mínimo en $\{(0, -1)\}$.
- d) Una curvatura circular.

10. Si al graficar $x^2 - y^2 = 4$ se obtiene una hipérbola, ¿cuál es su distancia focal?



- a) 2
- b) $2\sqrt{2}$
- c) 4
- d) $4\sqrt{2}$

Plano cartesiano



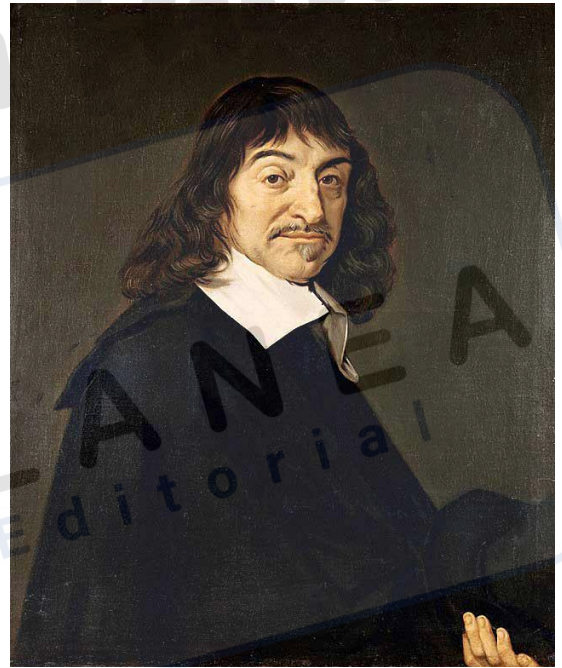
Apertura

Comprender el sistema de coordenadas rectangulares es el primer paso para traducir problemas abstractos en representaciones visuales, donde cada punto, línea o curva tiene un significado preciso. Pero este sistema no se limita a marcar posiciones; permite descubrir lugares geométricos, esos conjuntos de puntos que obedecen a una regla o condición particular. ¿Cómo se vería la ecuación de una circunferencia? ¿Qué forma adopta el recorrido de un punto que se mueve manteniendo siempre la misma distancia de otro? Estas preguntas encuentran respuesta en el estudio de las figuras geométricas y sus ecuaciones, un tema que enriquece el entendimiento teórico, y que también tiene aplicaciones prácticas en campos como la física, la ingeniería y la computación.

Y en esta era digital, herramientas como la calculadora gráfica y los programas de software matemático permiten visualizar funciones complejas, experimentar con parámetros y comprobar resultados de manera instantánea. Los individuos ya no están limitados a trazar manualmente cada curva; ahora es posible explorar patrones, ajustar variables y observar en tiempo real cómo cambian las gráficas.

Ahora que has recordado el plano cartesiano, si una pelota se mueve en línea recta, ¿cómo la representarías matemáticamente?, escribe tu respuesta en las siguientes líneas y comparte con tus compañeros de grupo.

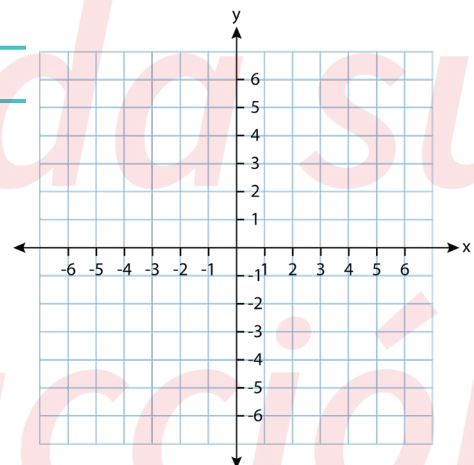
Si una pelota se mueve en línea recta, podemos representar matemáticamente su trayectoria utilizando la **ecuación de una recta** en el plano cartesiano. La forma más común es:



El filósofo y matemático René Descartes revolucionó la forma de conectar el álgebra con la geometría.



¡Escanéame!



Representación gráfica del plano cartesiano, legado fundamental de René Descartes.



Desarrollo

Sistema de coordenadas rectangulares

El plano cartesiano se basa en un sistema de coordenadas rectangulares, también llamado sistema coordenado cartesiano, el cual te permite ubicar puntos en un espacio plano mediante el uso de dos rectas perpendiculares que se cruzan en un punto central, estas rectas dividen el plano en cuatro partes llamadas cuadrantes y sobre ellas se pueden localizar puntos con mucha precisión.

Un sistema de coordenadas rectangulares es una forma de ubicar puntos en un espacio plano a través de dos líneas numéricas perpendiculares, una horizontal llamada eje X y otra vertical llamada eje Y , estos ejes se cruzan en un punto común al que se le llama origen, que tiene el valor de coordenadas $(0, 0)$. Cada punto en el plano puede ser representado por un par ordenado de números, donde el primero indica la posición sobre el eje X (también llamado eje de las abscisas) y el segundo sobre el eje Y (llamado eje de las ordenadas), por ejemplo, si quieres ubicar el punto $(4, 2)$, primero te desplazas 4 unidades hacia la derecha sobre el eje horizontal y luego subes 2 unidades sobre el eje vertical, llegando así al lugar exacto donde se encuentra ese punto.

La idea de este sistema fue desarrollada por el filósofo y matemático francés René Descartes, quien en el siglo XVII buscaba una forma de unir el álgebra con la geometría, antes de él, los números y las figuras se trataban por separado, sin embargo, su aporte permitió representar ecuaciones mediante dibujos y viceversa, convirtiéndose en uno de los avances más importantes en la historia de las matemáticas, de hecho, en honor a su apellido, este sistema lleva el nombre de cartesiano. Su trabajo fue publicado en una obra llamada *La Géométrie* en 1637, donde explicó cómo se podían representar curvas geométricas utilizando ecuaciones algebraicas, lo que abrió la puerta al desarrollo de la geometría analítica.

El plano cartesiano tiene varias partes esenciales que se deben conocer para entender cómo funciona correctamente, como ya se mencionó, los dos ejes principales son el eje X , que va de izquierda a derecha, y el eje Y , que va de abajo hacia arriba. El punto donde se cruzan, llamado origen, es el punto de referencia desde el cual se mide todo lo demás. Al estar divididos por los ejes, el plano queda dividido en cuatro regiones llamadas cuadrantes, el primer cuadrante está en la parte superior derecha y en él las coordenadas de los puntos son positivas tanto en X como en Y , el segundo cuadrante está en la parte superior izquierda, donde las coordenadas son negativas en X y positivas en Y , el tercer cuadrante se encuentra en la parte inferior izquierda, con ambas coordenadas negativas, y el cuarto cuadrante está en la parte inferior derecha, con coordenadas positivas en X y negativas en Y .

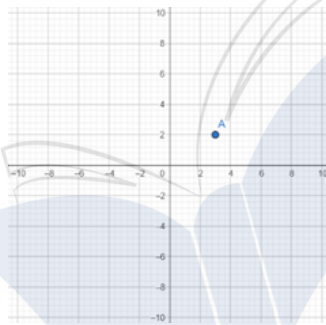
La notación de los puntos en el plano cartesiano se hace utilizando un par de números entre paréntesis, separados por una coma, en el formato (X, Y) , este par se llama par ordenado porque siempre se escribe primero el valor de la coordenada horizontal y luego el de la vertical, por ejemplo, si se te da el punto $(-3, 5)$, esto significa que debes moverte 3 unidades hacia la izquierda desde el origen (porque el valor de X es negativo) y luego subir 5 unidades (porque el valor de Y es positivo), otro ejemplo sería el punto $(0, -4)$, que se encuentra justo sobre el eje vertical, 4 unidades por debajo del origen, porque no hay desplazamiento en X pero sí en Y , con un valor negativo.

Si por ejemplo dibujas los puntos $(2, 3)$, $(-2, 3)$, $(-2, -3)$ y $(2, -3)$, observamos que forman un rectángulo que se distribuye simétricamente respecto al origen, lo que demuestra cómo este sistema ayuda a visualizar relaciones espaciales de manera clara, también se pueden usar puntos para representar ubicaciones, como en un mapa, o para estudiar el movimiento de un objeto a través del tiempo, lo que resulta muy útil en ciencias aplicadas.

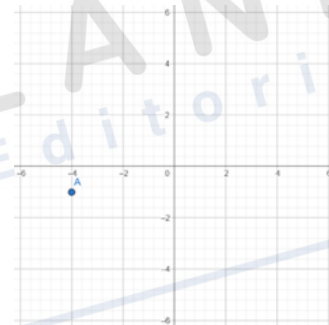
Ubicación y graficación de puntos

Una vez que se han entendido los elementos del plano cartesiano y la forma correcta de escribir un punto como un par ordenado, el siguiente paso es practicar la ubicación y graficación de puntos en ese plano. Para lograrlo, es necesario seguir una estrategia clara que lleve desde la lectura de un punto hasta su correcta colocación en el plano, lo primero es identificar sus coordenadas, es decir, los valores de X y de Y , y luego entender cómo estos valores determinan el desplazamiento del punto con respecto al origen.

Cuando se graficas un punto como $(3, 2)$, debes comenzar en el origen, que es el punto $(0, 0)$, y desplazarte primero 3 unidades a la derecha sobre el eje X , ya que el valor de X es positivo, y luego subir 2 unidades hacia arriba sobre el eje Y , porque el valor de Y también es positivo. Si el punto fuera $(-4, -1)$, el procedimiento sería similar, pero en este caso, te moverías 4 unidades hacia la izquierda por ser un valor negativo en X , y 1 unidad hacia abajo, ya que Y también es negativo, así, cada par ordenado da instrucciones precisas para localizar un punto en el plano, combinando un desplazamiento horizontal para la coordenada X y uno vertical para la coordenada Y .



$(3,2)$



$(-4,-1)$

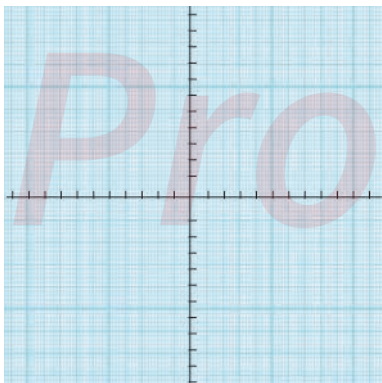


Práctica de aprendizaje

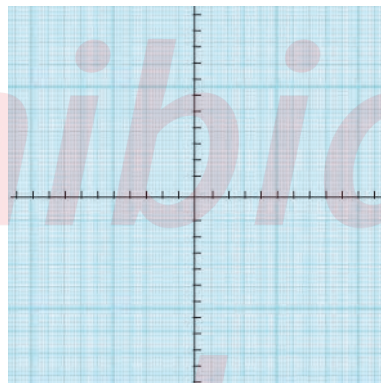


3 Explicar

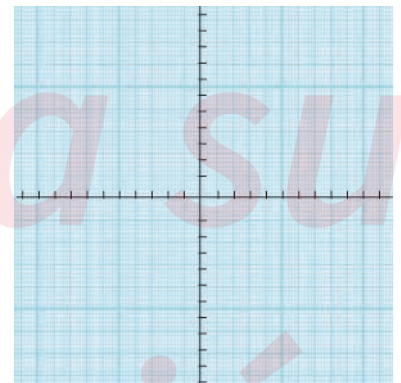
Grafica los siguientes puntos:



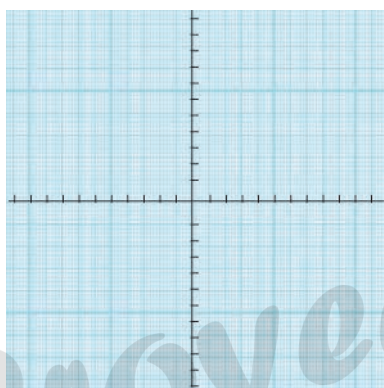
$(2, 4)$



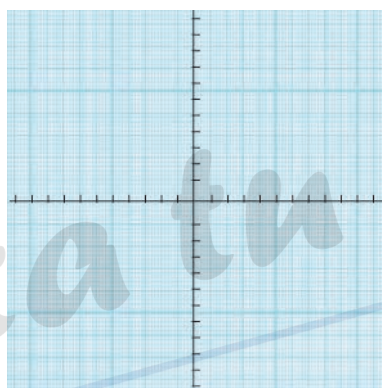
$(-3, 1)$



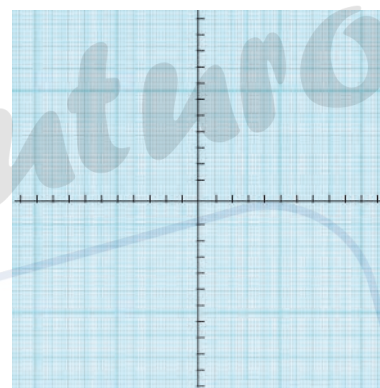
$(-1, -5)$



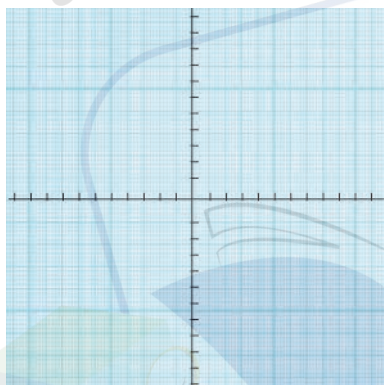
(4, -2)



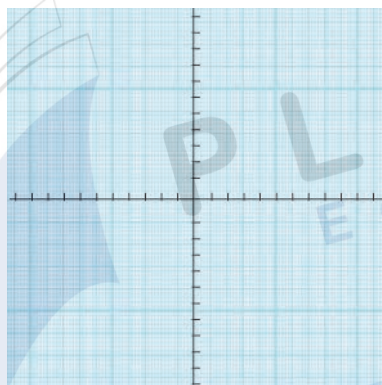
(0, 5)



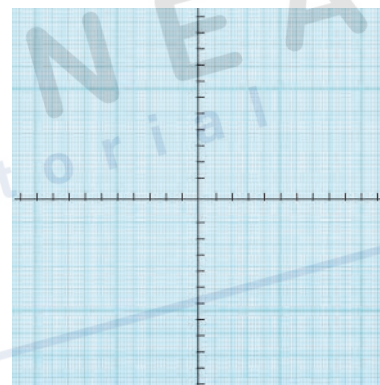
(-6, 0)



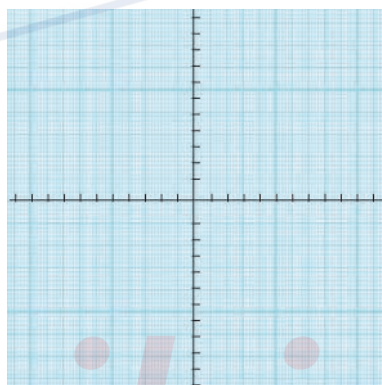
(0, 0)



(0, -7)



(-6, 8)



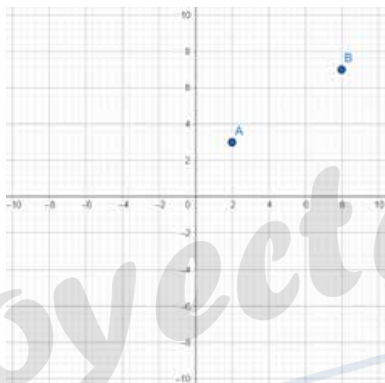
(4, 0)

Punto medio

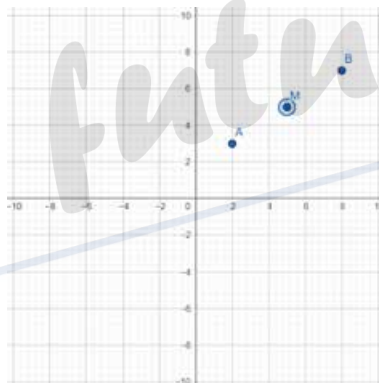
Imagina que tienes un segmento de recta dibujado en tu plano cartesiano, definido por dos puntos, $A(2, 3)$ y $B(8, 7)$, si quisieras encontrar exactamente la mitad de ese segmento, ¿cómo lo harías? Aquí es donde entra en juego el punto medio, un concepto que te permite hallar las coordenadas del punto que divide al segmento en dos partes iguales. La fórmula del punto medio surge de un promedio sencillo, si se suman las coordenadas X de ambos puntos y se dividen entre 2, se obtiene la X del punto medio, y se hace lo mismo con las coordenadas Y . Así, en el ejemplo, el punto medio M sería:

$$M = \left(\frac{2 + 8}{2}, \frac{3 + 7}{2} \right) = (5, 5)$$

$A = (2, 3)$ y $B = (8, 7)$



$M = (5, 5)$



Elaborar

A



Práctica de aprendizaje



ANEAA
Editorial

Encuentra el punto medio con la fórmula y gráfico.

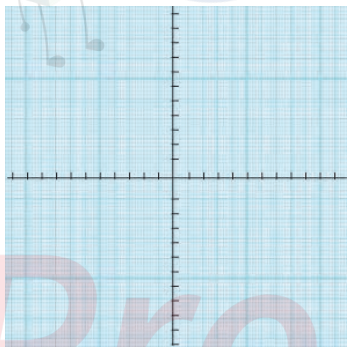
Punto Medio

Fórmula:

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

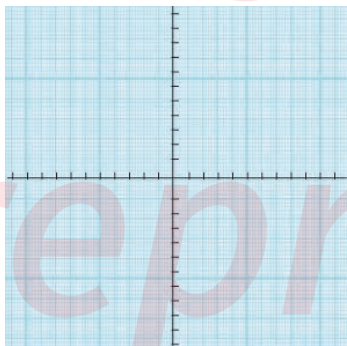
1. Puntos: $A(2, 5)$ y $B(6, 9)$

Resultado: _____



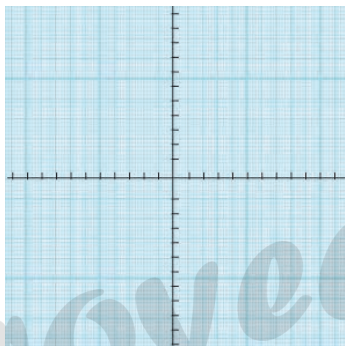
2. Puntos: $A(-3, 4)$ y $B(7, -2)$

Resultado: _____



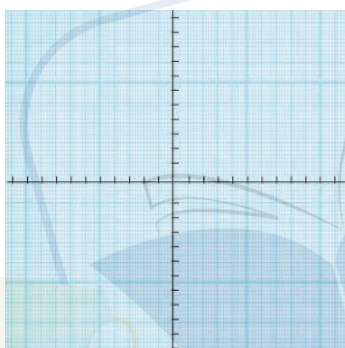
3. Puntos: A(0, -1) y B(8, 3)

Resultado: _____



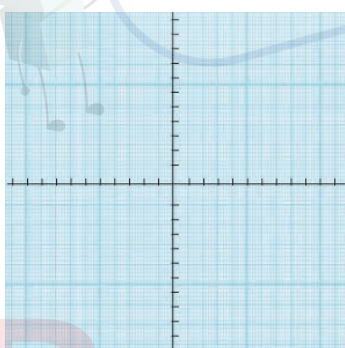
4. Puntos: A(-5, -6) y B(3, 10)

Resultado: _____



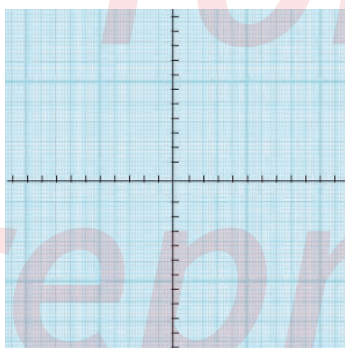
5. Puntos: A(1.5, 2.5) y B(4.5, 6.5)

Resultado: _____



6. Puntos: A(-2, 0) y B(0, -8)

Resultado: _____



Prohibida su
reproducción

Calculadora gráfica

Una calculadora gráfica es una herramienta digital diseñada para representar funciones, ecuaciones y datos de forma visual en un plano cartesiano, permitiendo calcular valores numéricos, observar patrones, comportamientos y relaciones entre variables de manera intuitiva, imagina por ejemplo, que quieres graficar una parábola: en lugar de tabular punto por punto y dibujarla a mano, con solo ingresar la ecuación, el software traza la curva de forma instantánea, liberando tiempo para analizar su vértice, sus raíces o su concavidad.

Entre las herramientas más poderosas y accesibles hoy en día están GeoGebra y Tracker, cada una con ventajas únicas. GeoGebra, por un lado, es como un laboratorio matemático integral, ideal para graficar funciones, explorar geometría dinámica o incluso resolver ecuaciones simbólicamente, su interfaz amigable y su capacidad para interactuar con deslizadores lo convierten en un aliado perfecto para visualizar cómo cambia una gráfica al modificar sus parámetros, como cuando ajustas el coeficiente de una función cuadrática y ves en tiempo real cómo se abre o cierra la parábola. Tracker, por otro lado, es especialista en el análisis de movimiento, ya que permite extraer datos de videos para estudiar fenómenos físicos, como el lanzamiento de un balón, y convertirlos en gráficas de posición o velocidad, algo que sería casi imposible de hacer con precisión usando solo papel y lápiz.

Mientras que antes se dependía de tablas de valores, reglas y compases para trazar gráficas, hoy un clic te brinda precisión milimétrica y la posibilidad de corregir errores al instante, sin mencionar la capacidad de simular escenarios complejos, como el comportamiento de una onda senoidal bajo diferentes frecuencias, que en papel requeriría horas de trabajo. Pero esto no significa que lo tradicional haya perdido valor, de hecho, entender los fundamentos detrás de cada gráfica sigue siendo esencial, pues las herramientas digitales son solo un complemento que potencia el razonamiento.

Piensa en este ejemplo concreto: al estudiar el movimiento rectilíneo uniforme, en lugar de limitarte a fórmulas abstractas, con Tracker podrás grabar un carrito desplazándose, marcar su posición *frame* por *frame* y obtener una gráfica posición-tiempo que, al ajustarse a una recta, confirmará visualmente la teoría aprendida. Luego, en GeoGebra, podrás contrastar esos datos experimentales con la ecuación teórica, viendo cómo pequeños errores de medición se reflejan en las discrepancias entre ambas, esta integración entre lo concreto y lo digital hace el aprendizaje más dinámico y fomenta una comprensión más profunda y crítica.

Primeros pasos en GeoGebra

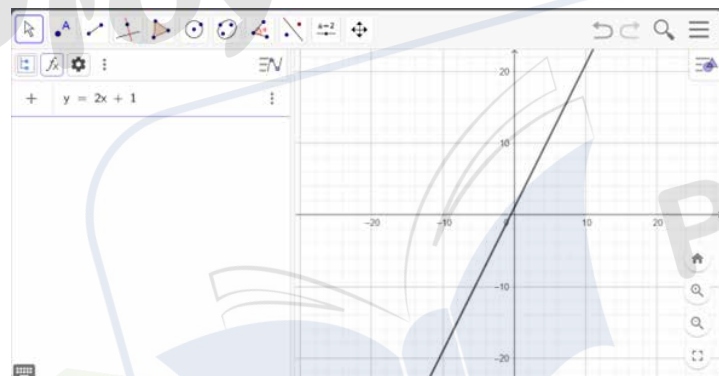
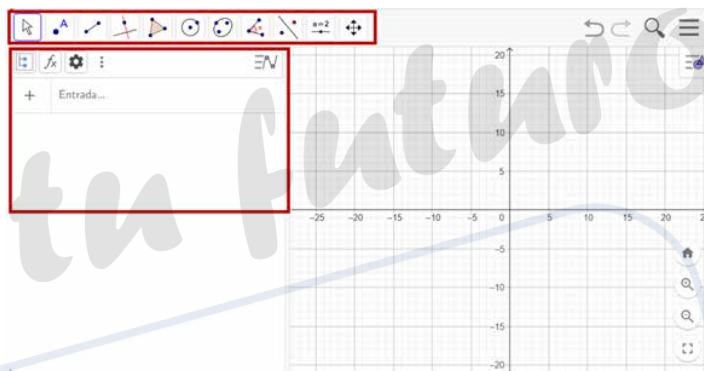
Lo primero que necesitas es descargar e instalar el software, lo cual es muy sencillo: basta con ingresar a la página oficial de GeoGebra (geogebra.org) y seleccionar la versión adecuada para tu sistema operativo, ya sea Windows, macOS o Linux, incluso puedes usarlo directamente en línea sin necesidad de instalación. Una vez descargado, el proceso de instalación sigue los pasos habituales de cualquier programa, y en cuestión de minutos tendrás listo el entorno para empezar a trabajar.



Al abrir GeoGebra por primera vez, verás una interfaz limpia, pero llena de posibilidades. En el centro de la pantalla encontrarás el **plano cartesiano**, con sus ejes "X" y "Y" marcados con claridad, junto con una cuadrícula que facilita la visualización de puntos y gráficas.

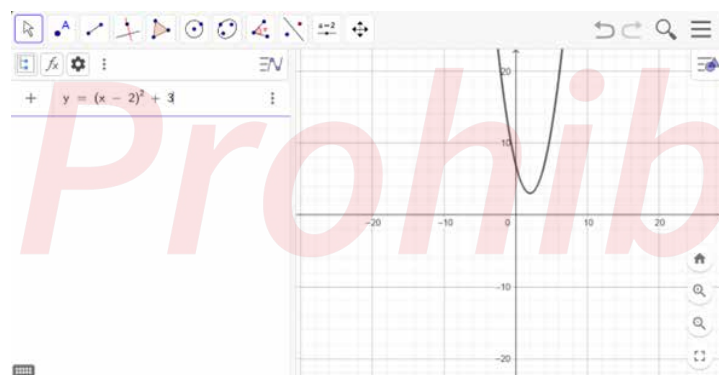
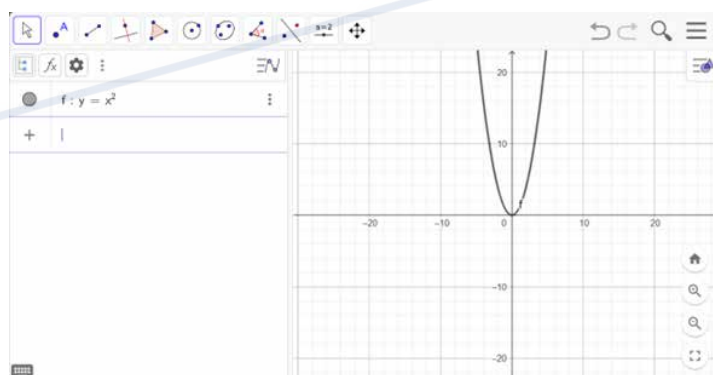


A la izquierda, hay una barra de herramientas con opciones como *Punto*, *Recta*, *Polígono* y muchas más, mientras que en la parte superior encontrarás campos de entrada donde podrás escribir ecuaciones directamente.



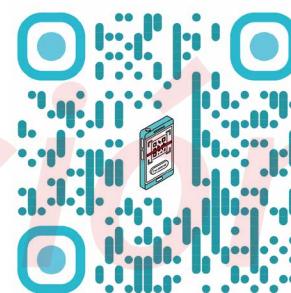
Por ejemplo, si deseas graficar una recta como $y = 2x + 1$, solo debes teclearla en la barra de entrada y presionar *Enter*: en seguida verás la línea trazarse sobre el plano, lo que permite una comprensión visual instantánea de cómo se comporta la función.

Graficar funciones básicas, como rectas o parábolas, es un excelente punto de partida para familiarizarse con el programa. Si se toma el caso de una parábola, digamos $y = x^2$, al escribir esta ecuación, GeoGebra dibujará automáticamente la curva simétrica que todos conocen, con su vértice en el origen.



Una ventaja clave es que puedes manipular estas gráficas de manera dinámica: si cambias la ecuación a $y = (x - 2)^2 + 3$, observarás cómo la parábola se desplaza dos unidades a la derecha y tres hacia arriba, lo cual ayuda a entender de manera concreta el efecto de los parámetros en las funciones.

Además, si activas la herramienta *Deslizador*, podrás asignar valores variables a los coeficientes y ver en tiempo real cómo se ajusta la gráfica, convirtiendo un concepto abstracto en algo tangible e interactivo.



Práctica de aprendizaje

Realiza la gráfica de las siguientes funciones por medio de GeoGebra, almacena los archivos de cada una de las funciones de manera local y envía los archivos a tu maestra(o) por correo electrónico.

a. $f(x) = x^2 - 6x + 2$
 b. $f(x) = 2x^3 - 9$
 c. $f(x) = 3x - 7$

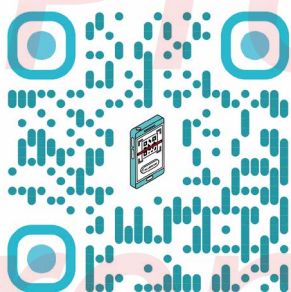
Introducción a Tracker

Imagina que quieres estudiar el movimiento de una pelota que lanzas al aire o el recorrido de un coche en una carrera, pero necesitas hacerlo con precisión científica, aquí es donde **Tracker** se convierte en una herramienta invaluable. Tracker es un software gratuito de análisis de video que permite rastrear objetos en movimiento, extraer datos de posición, velocidad y aceleración, y representarlos gráficamente en un plano cartesiano. A diferencia de las herramientas tradicionales que requieren mediciones manuales, Tracker automatiza el proceso, facilitando el estudio de fenómenos físicos de manera interactiva y visual.

Para comenzar a usar Tracker, el primer paso es importar un video, ya sea grabado por los estudiantes o descargado de un experimento ya existente. Una vez cargado el video, es esencial **calibrar los ejes**, es decir, definir una escala de referencia en el mundo real. Por ejemplo, si en el video hay una regla o un objeto de tamaño conocido, se le puede indicar al programa que 10 píxeles equivalen a 1 metro. Esta calibración es crucial porque permite que las mediciones sean realistas y no solo dependan de la resolución del video.

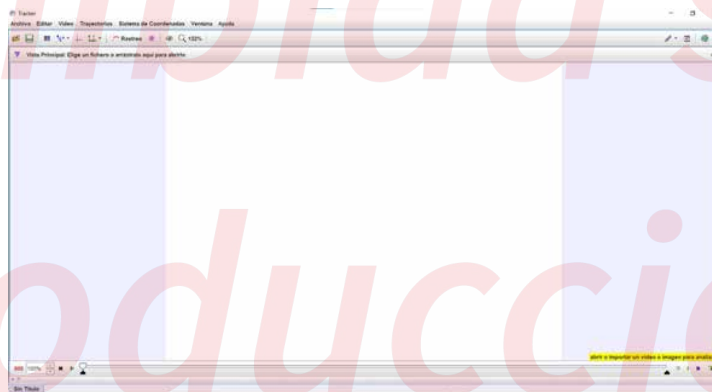


Adéntrate al uso de la aplicación Tracker y observa el video tutorial del código QR.



Para descargar la aplicación Tracker 6.0 en una computadora accede al portan que se encuentra en el código QR.

Una vez configurada la escala, llega la parte más fascinante: el **seguimiento de objetos**. Imagina que tienes un video donde un balón es lanzado en forma parabólica. Tracker permite marcar manual o automáticamente la posición del balón en cada fotograma, generando así una tabla de datos con las coordenadas (X, Y) a lo largo del tiempo. Con esta información, el software puede trazar la trayectoria en el plano cartesiano y, además, calcular derivadas como la velocidad horizontal y vertical, o incluso la aceleración debida a la gravedad. Esto ayuda a visualizar conceptos abstractos como el movimiento uniformemente acelerado y permite contrastar los datos experimentales con las ecuaciones teóricas, fomentando un aprendizaje basado en la indagación.

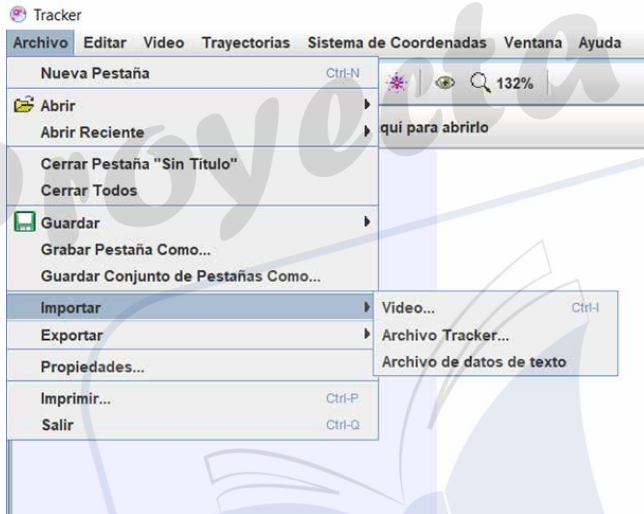


Interfaz de la aplicación Tracker 6.0.

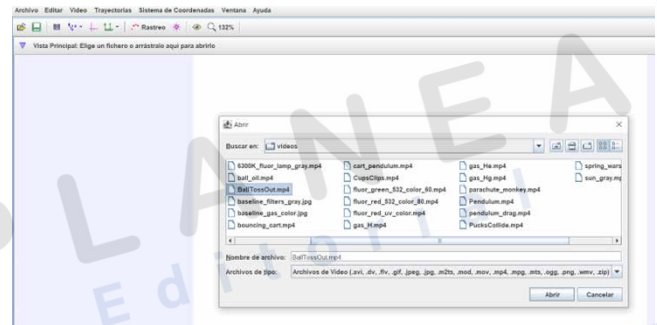
Pasos para realizar un seguimiento del movimiento de un objeto en Tracker.


1. Importar un video que contenga el movimiento, para lo cual se deben realizar los siguientes pasos:

a) Seleccionar o una opción similar dentro del menú "Archivo", "Importar", "Video".



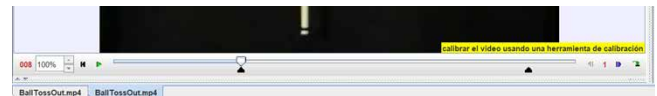
b) Buscar el video en la computadora y seleccionar el archivo que se desea importar.



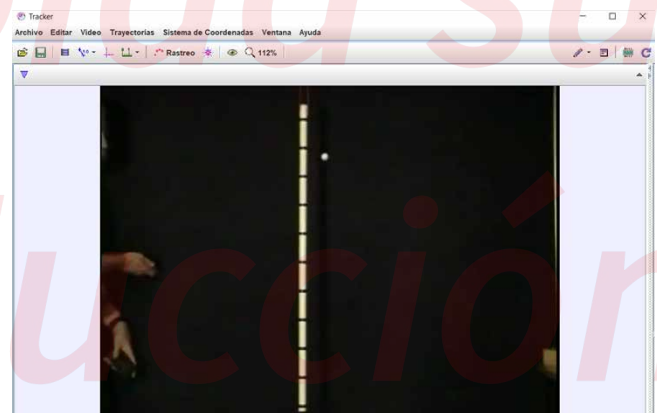
c) Recortar fragmentos o establecer puntos de referencia, dando clic al ícono "Ajustes del corte" , se establecen los fotogramas de inicio y fin que se desea analizar en el video.



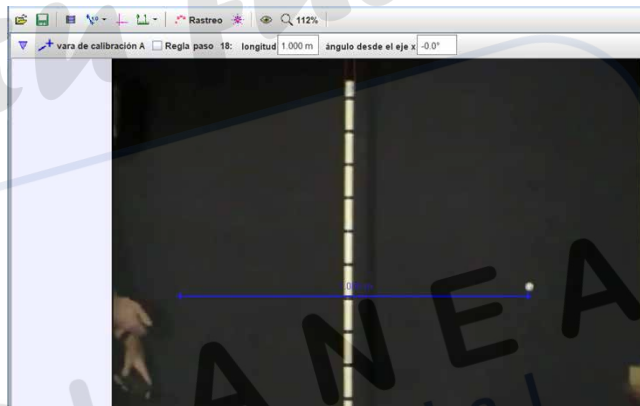
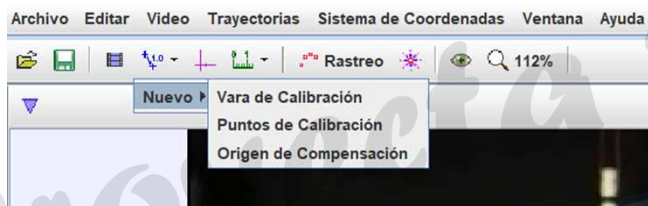
d) Una vez configurado los fotogramas que se van a analizar en el video, se verifica la secuencia a través de la barra de reproducción del video en la parte inferior de la pantalla.




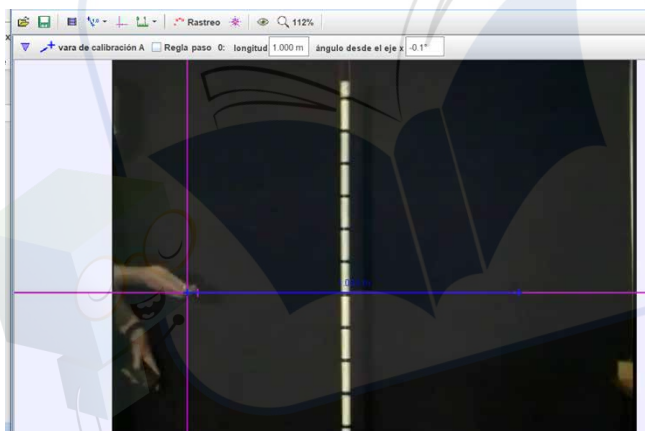
e) Asegurarse de que el video se haya importado de forma correcta y esté listo para su uso en Tracker.



- Establecer una escala insertando una "Vara de calibración", para lo cual es necesario conocer alguna distancia real de lo que se esta proyectando en el video o establecer una a partir de lo observado en el video. Para insertar la "Vara de calibración", se da clic en el ícono "Herramientas de calibración", "Vara de calibración", después se dibuja sobre el video y se define la longitud.



- Se establece un sistema de coordenadas, dando clic en el ícono  y se define el punto origen.



- El siguiente paso es crear una masa puntual, para lo cual se da clic en el ícono "Rasteos", "Nuevo", "Masa puntual".



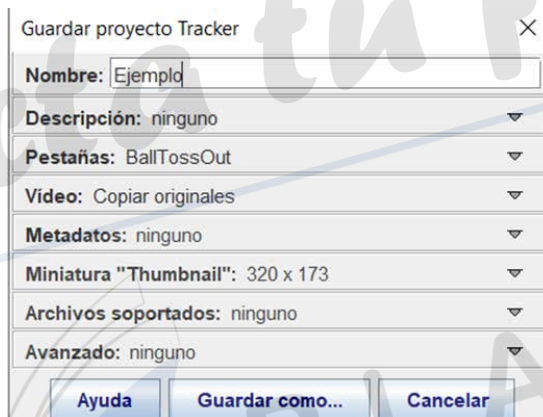
- Se configura el objeto que se define como masa puntual, es recomendable hacer zoom, y elegir el fotograma donde aparezca el objeto, después se oprime la tecla Shift ↑, y se da clic con el mouse para seleccionarlo, el programa automáticamente cambiará de fotograma para que se siga seleccionando la masa puntual.



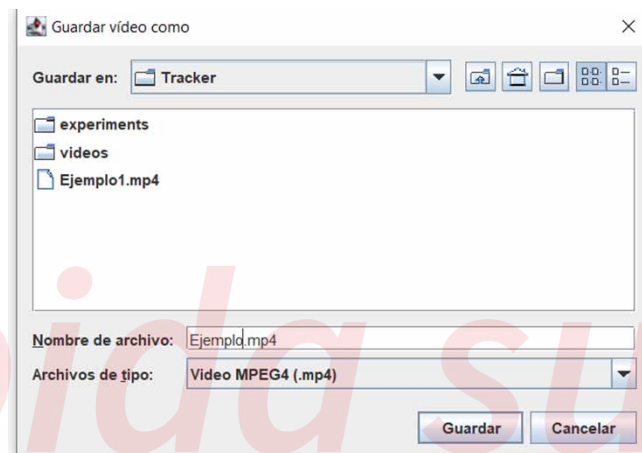
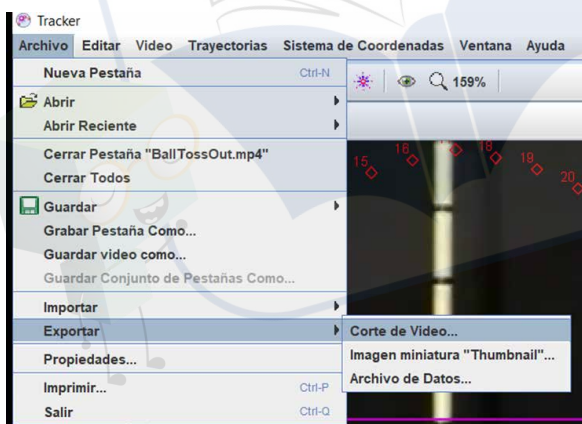
La masa puntual se puede definir su valor en Kg en el siguiente cuadro de la parte superior de la pantalla.



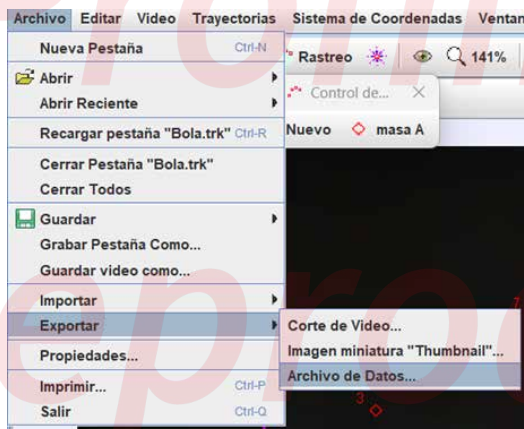
- Conforme se selecciona la masa puntual en cada fotograma el programa analiza el movimiento, generando una gráfica del tiempo y desplazamiento en el eje X y el eje Y , además de una tabla de valores.
- Se debe almacenar el proyecto, dando clic en el menú "Archivo", "Guardar", donde se define su nombre en la siguiente ventana.

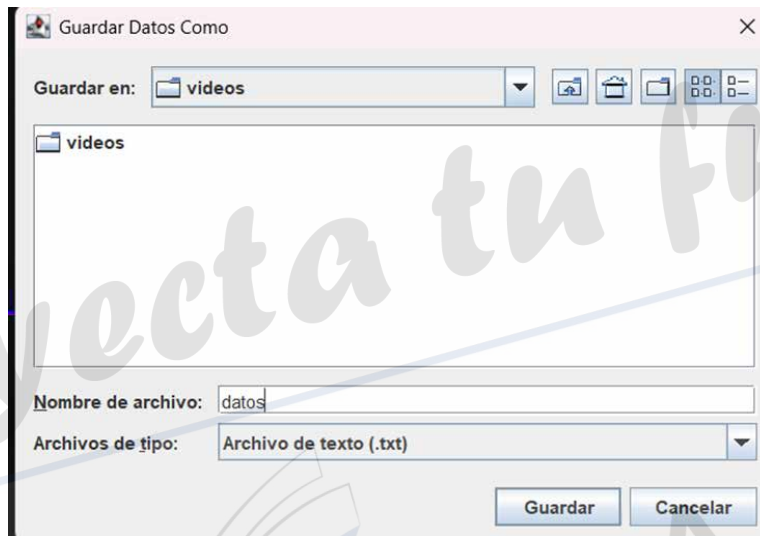


- También se puede exportar el video dando clic en "Archivo", "Exportar", "Corte de video", asignar el nombre y carpeta.



- Se exportan los datos del seguimiento del movimiento para poder crear los puntos que se pueden graficar en GeoGebra y crear la gráfica del movimiento. Para exportar los datos se da clic en "Archivo", "Exportar", "Datos".

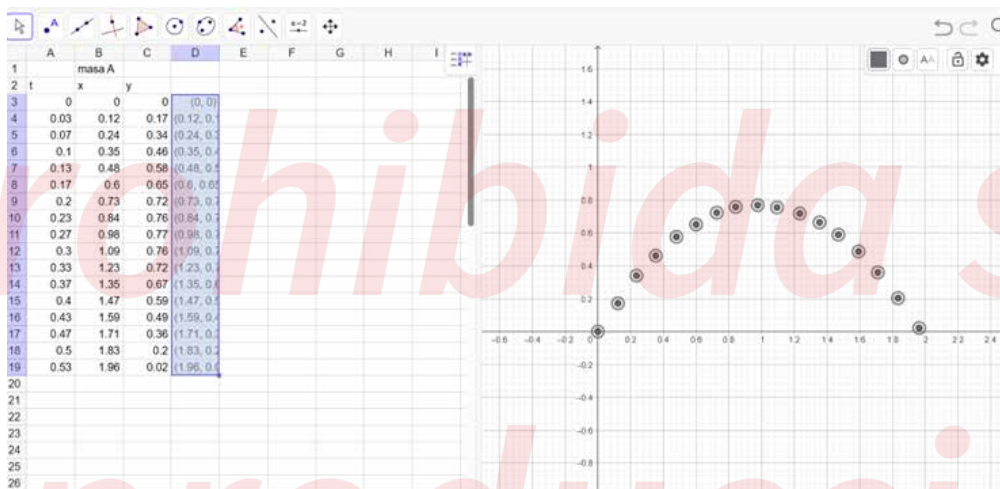




O copiar en el portapapeles para introducirlos en una hoja de cálculo de GeoGebra.



10. Para graficar los puntos solo se coloca en la siguiente columna entre paréntesis el valor de X y Y .



De esta manera se pueden realizar la integración de la trayectoria de un objeto captado en video, analizado por Tracker y representado en el plano cartesiano con GeoGebra.



Práctica de aprendizaje



5 **Evaluar**

Unidad 1

Análisis de la caída libre de un objeto con Tracker

Instrucciones: Reunidos en equipos de tres personas deben realizar la captura en video de la caída libre de un objeto, analizar su movimiento utilizando la herramienta Tracker y registrar sus observaciones en un informe estructurado.

Materiales:

- ➔ Cámara o celular con capacidad de grabación de video.
- ➔ Computadora con Tracker instalado.
- ➔ Cinta métrica o regla para referencias espaciales.
- ➔ Cronómetro o acceso a herramientas digitales para medir el tiempo.

Procedimiento:

- 1. Captura del video:**
 - Los equipos seleccionarán un objeto y lo dejarán caer desde una altura determinada.
 - Se recomienda que la cámara grabe el objeto con un fondo contrastante para facilitar el seguimiento.
 - Se debe incluir una escala visible en el video (por ejemplo, una regla o un punto de referencia con medidas conocidas).
- 2. Importación y análisis en Tracker:**
 - Los estudiantes importarán el video en Tracker y marcarán el movimiento cuadro por cuadro.
 - Determinarán la posición del objeto en función del tiempo y analizarán su aceleración.
- 3. Registro de datos y conclusión:**
 - Los equipos compararán sus resultados con la ecuación del movimiento de caída libre: $(y = 1/2 g t^2)$.
 - Reflexionarán sobre posibles fuentes de error y explicarán cómo mejorar la precisión del experimento.
- 4. Presentación del informe:**
 - Cada equipo elaborará un informe que incluya el video, gráficos generados en Tracker y un análisis de los resultados obtenidos.

Para evaluar esta actividad revisen la siguiente rúbrica.

Criterio	Nivel Básico (1)	Nivel Intermedio (2)	Nivel Avanzado (3)	Total
Captura del video	Video borroso, sin escala de referencia.	Video claro, con escala visible pero poca estabilidad.	Video nítido, buena iluminación y escala correctamente ubicada.	
Uso de tracker	Dificultades en la importación y el seguimiento del objeto.	Seguimiento correcto, pero con algunos errores en el análisis de datos.	Seguimiento preciso y análisis bien fundamentado.	
Registro de datos	Datos incompletos o poco claros.	Datos bien registrados, pero sin gráficos detallados.	Datos completos, gráficos claros y bien estructurados.	
Análisis y conclusiones	Explicaciones vagas sin conexión con la teoría.	Reflexión adecuada, pero con errores en la interpretación.	Conclusiones fundamentadas y alineadas con las leyes del movimiento.	
Presentación del informe	Informe desorganizado y sin estructura clara.	Informe estructurado, pero con información poco detallada.	Informe bien organizado, con información detallada y bien presentada.	



Estudio independiente

Responde cada uno de los siguientes planteamientos.

1. Un futbolista patea un balón desde el suelo con un ángulo de 45° respecto al eje horizontal. Si el balón sigue una trayectoria parabólica y aterriza 20 metros adelante, describe el comportamiento del movimiento en términos de su trayectoria.

2. Se graba el lanzamiento de una pelota con una cámara y se analiza el video en Tracker para obtener datos de posición en función del tiempo. Luego, en GeoGebra, se modela la trayectoria con una ecuación cuadrática. Explica cómo utilizar estas herramientas para analizar el movimiento de la pelota.

3. Un ciclista salta desde una rampa inclinada. Su movimiento puede describirse como un proyectil. Explica su trayectoria utilizando términos intuitivos y gráficos.

Autoevalúa los aprendizajes de la progresión con la siguiente rúbrica.

Criterio	Nivel Básico	Nivel Intermedio	Nivel Avanzado
Intuición de la trayectoria en dos dimensiones	Identifica de manera general el movimiento del objeto sin precisar detalles de trayectoria.	Reconoce patrones en el movimiento y describe parcialmente la trayectoria en función de un sistema coordenado cartesiano.	Explica con precisión la trayectoria usando conceptos matemáticos y representaciones gráficas.
Uso de Tracker y GeoGebra para rastrear el movimiento	Utiliza el software con ayuda y logra obtener representaciones básicas del movimiento.	Maneja Tracker y GeoGebra con autonomía parcial, generando representaciones más detalladas de la trayectoria.	Domina el uso de ambos programas, realizando análisis completo y preciso del movimiento con representaciones visuales claras.
Descripción heurística de la trayectoria	Describe la trayectoria de manera general sin utilizar herramientas matemáticas o gráficas.	Explica el movimiento con términos más precisos, apoyándose parcialmente en representaciones gráficas.	Interpreta y comunica el comportamiento del objeto con un análisis fundamentado en gráficos y conceptos matemáticos.

Lugares y regiones geométricas



Apertura

¿Alguna vez te has preguntado cómo los mapas digitales saben con exactitud dónde estás, o cómo los ingenieros diseñan puentes y edificios con tanta precisión? Todo empieza con algo tan sencillo como un plano de coordenadas.

Piensa en algo cotidiano: cuando abres una app de mapas y ves ese puntito azul que marca tu ubicación, estás viendo las coordenadas en acción. O cuando admiras el diseño aerodinámico de un auto o la curva perfecta de un puente, detrás hay geometría analítica trabajando. Estos no son conceptos abstractos, sino herramientas que dan forma al mundo.

La belleza del sistema de coordenadas está en su simplicidad, dos líneas perpendiculares bastan para crear un lenguaje universal que traduce números en formas y ecuaciones en gráficos, y cuando se le añade una calculadora gráfica o un software de diseño, esas ideas cobran vida, permitiendo experimentar con patrones y estructuras de formas que antes eran imposibles.

Estudiando estos conceptos puedes predecir trayectorias, optimizar diseños o incluso crear arte digital con base en ecuaciones. La geometría deja de ser ejercicios en un cuaderno para convertirse en una lente que revela el orden matemático detrás de todo, desde la arquitectura hasta los videojuegos.



Desarrollo

2 Explorar

Lugares geométricos básicos en el plano

Dentro del plano, los lugares geométricos más comunes son la recta, la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola, los cuales tienen ecuaciones que permiten graficarlos con exactitud.

La recta

Imagina un poste de luz, un rascacielos o incluso una bandera izada: todos son ejemplos perfectos de una recta vertical en la vida real, estas líneas no se inclinan ni a la izquierda ni a la derecha; simplemente se alzan hacia el cielo (o hacia abajo) de manera completamente recta.

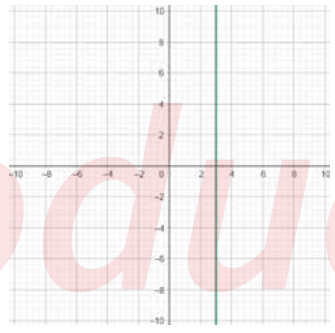
Una recta vertical es el conjunto de todos los puntos (Y) en el plano cartesiano que comparten la misma coordenada (X) , su ecuación es:

$$X = k$$

- **k:** Es un número real constante que indica dónde la recta corta el eje X .

Ejemplo:

$$X = 3$$



Prohibida su reproducción

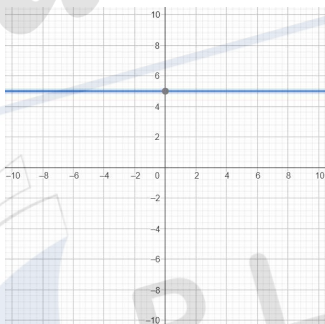
Una recta horizontal es el conjunto de todos los puntos (X) en el plano cartesiano que comparten la misma coordenada Y, su ecuación es:

$$Y = k$$

- **k:** Es un número real constante que indica dónde la recta corta el eje Y.

Ejemplo:

$$y = 5$$



Explicar

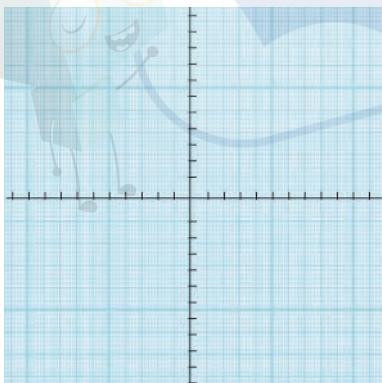
3



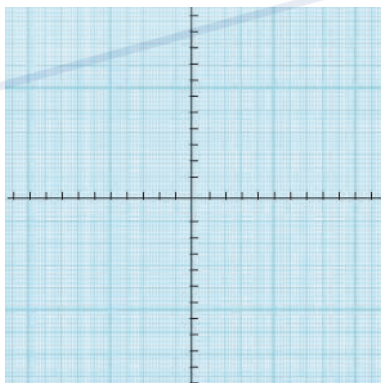
Práctica de aprendizaje



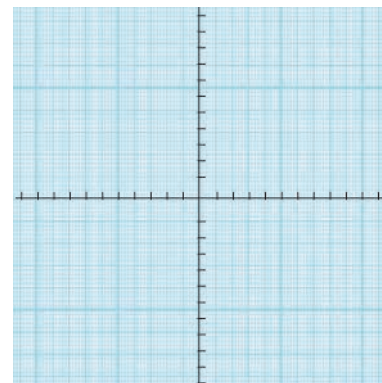
Grafica las siguientes rectas:



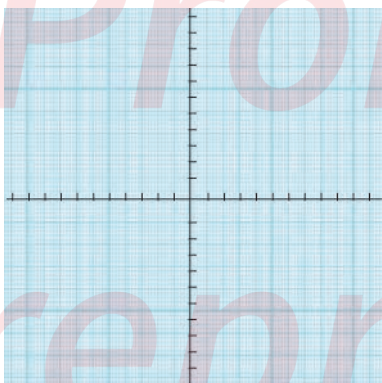
$$Y = 4$$



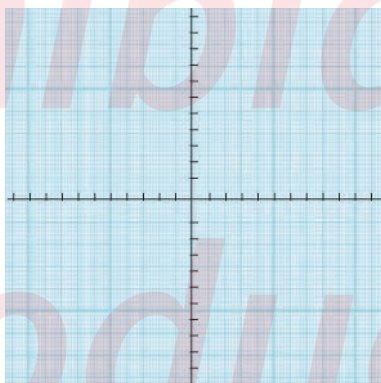
$$X = 7$$



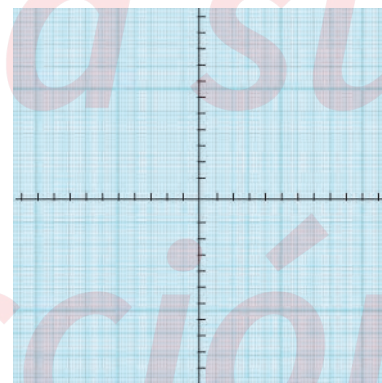
$$X = 0$$



$$y = -8$$



$$X = -6.5$$



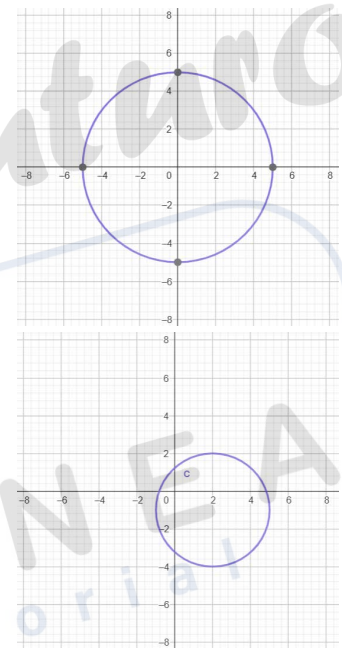
$$Y = 2.5$$

La circunferencia

Imagina el aro de una bicicleta, el borde de una pizza o el anillo de un dedo: todos son ejemplos perfectos de circunferencias, es una figura geométrica cerrada y redonda, donde todos sus puntos están exactamente a la misma distancia de un punto central.

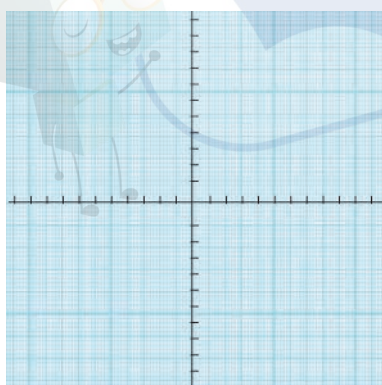
Se define como el conjunto de todos los puntos del plano que están a la misma distancia de un punto fijo llamado centro, esa distancia constante se llama radio, si el centro está en el origen, la ecuación de la circunferencia tiene una forma sencilla: $x^2 + y^2 = r^2$, donde r es el valor del radio, por ejemplo, si se escribe $x^2 + y^2 = 25$, se trata de una circunferencia con centro en el origen y radio igual a 5, ya que 25 es el cuadrado de 5.

Si el centro no está en el origen sino en un punto cualquiera (a, b) , entonces la ecuación se transforma en $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, lo que permite trasladar la circunferencia a cualquier parte del plano. Así, si se tiene $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$, se está hablando de una circunferencia con centro en el punto $(2, -1)$ y radio 3.

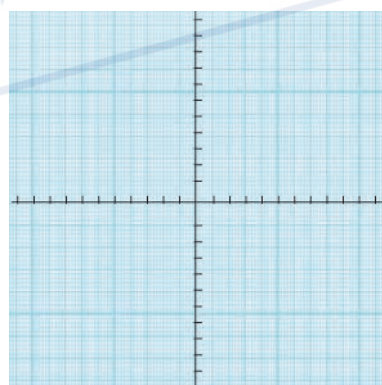


Práctica de aprendizaje

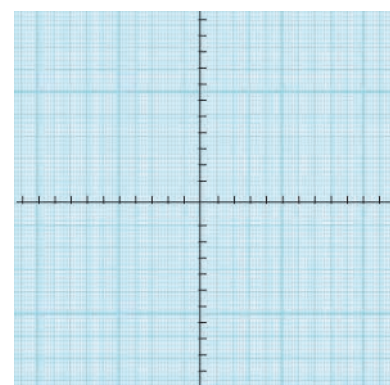
Grafica las siguientes circunferencias:



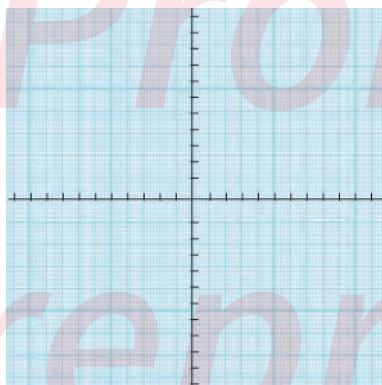
$x^2 + y^2 = 16$



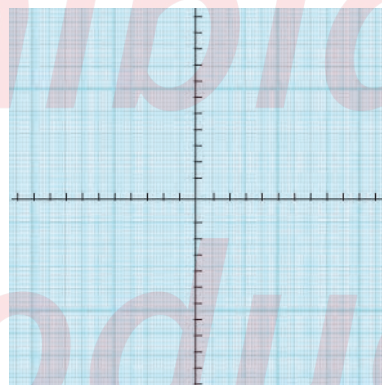
$(x-3)^2 + y^2 = 9$



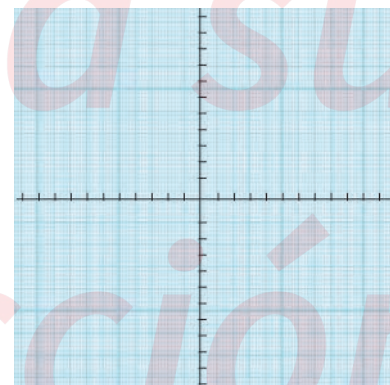
$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$



$(x+2)^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{4}$



$(x-5)^2 + (y+3)^2 = 9$



$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$

Prohibida su reproducción

La parábola

Imagina lanzar una pelota al aire, ese arco perfecto que describe antes de caer es una parábola, su forma simétrica (como una "U" abierta hacia arriba o abajo, y en algunos casos, hacia los lados) surge de una relación matemática precisa entre sus puntos.

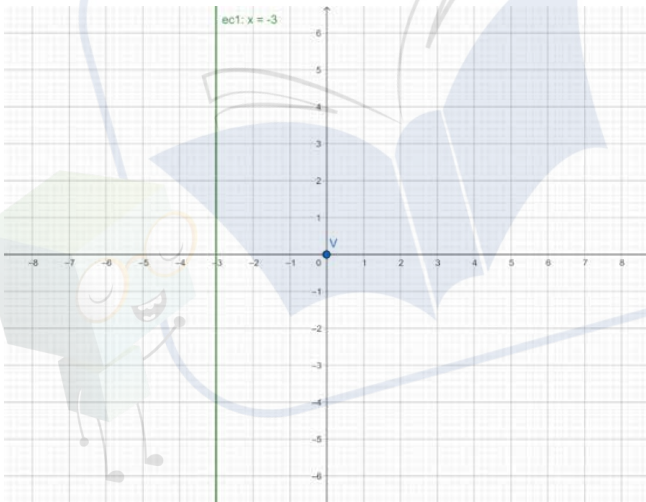
Una parábola es el lugar geométrico de todos los puntos (X, Y) que equidistan de un punto fijo llamado foco y una recta fija llamada directriz.

Ejemplo 1:

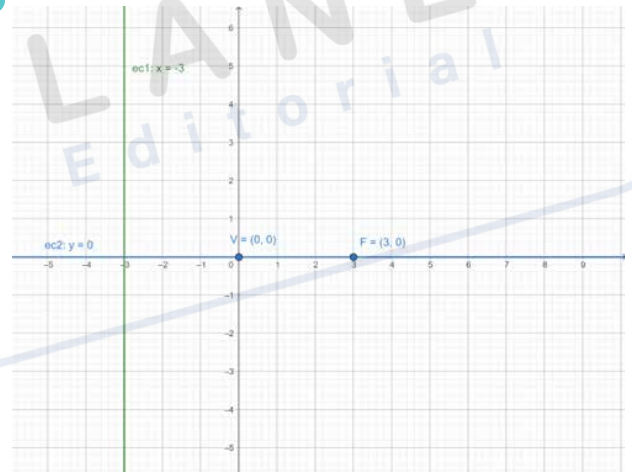
Una parábola tiene vértice en el origen y su directriz es la $x = -3$, ¿cuál es su ecuación de la forma ordinaria, el valor de sus elementos y su gráfica?

Solución:

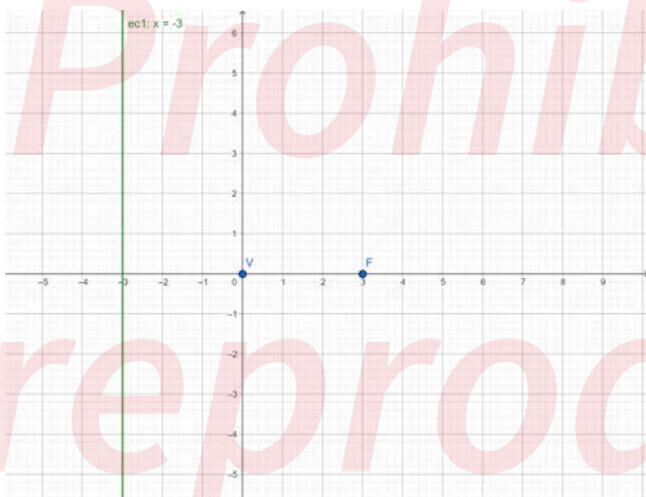
1 El primer paso es ubicar los elementos que se tienen de la parábola en un plano cartesiano, en este caso, $v(0,0)$ y directriz $x = -3$



3 El eje de simetría es el eje X, la ecuación es: $Y = 0$.



2 Al ubicar el vértice y la directriz, se observa que la distancia entre estos valores es 3, por lo tanto, $p = 3$ y el foco se encuentra en la coordenada $F(3,0)$, la parábola abre hacia la derecha, es horizontal.

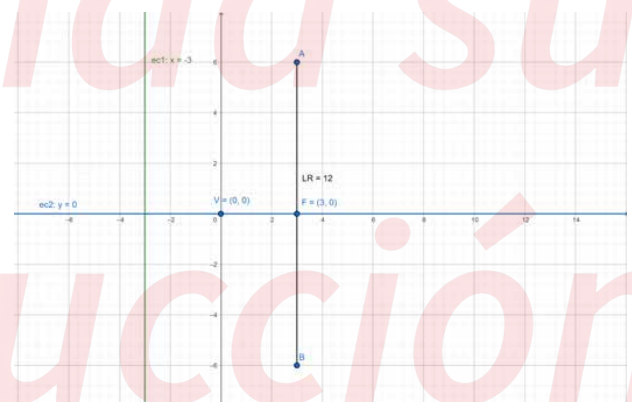


4 El lado recto es:

$$LR = |4p|$$

$$LR = |4 \times 3| = 12 \text{ unidades}$$

Es un segmento de recta perpendicular al eje de simetría y que pasa por el foco.



5 La ecuación ordinaria de la parábola es:

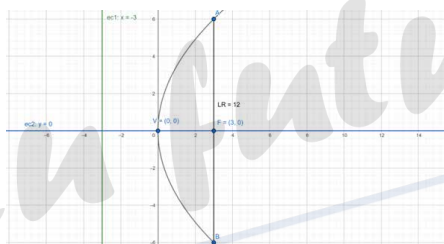
$$y^2 = 4px$$

Se utiliza esta fórmula porque la parábola es horizontal

$$y^2 = 4(3)x$$

$$y^2 = 12x$$

Al graficarla queda:



Ejemplo 2:

Encuentra los elementos, la ecuación ordinaria y gráfica de la parábola que tiene vértice en el origen y su foco se ubica en F(0, -4).

Solución:

Para encontrar los elementos de la parábola es necesario plasmar en un plano los datos iniciales de la parábola, en este caso V (0, 0) y F (0, -4).

Al ubicar los datos se obtienen las siguientes conclusiones:

1. El valor de $p = -4$
2. La parábola es vertical y abre hacia abajo.
3. La directriz es $y = 4$, debido a que debe ser la misma distancia del vértice al foco que del vértice a la directriz.
4. El eje de simetría corresponde al eje Y, por lo tanto, su ecuación es $x = 0$.

Al tomar en cuenta las conclusiones anteriores y marcarlas en el plano, se obtiene:

Se calcula el lado recto:

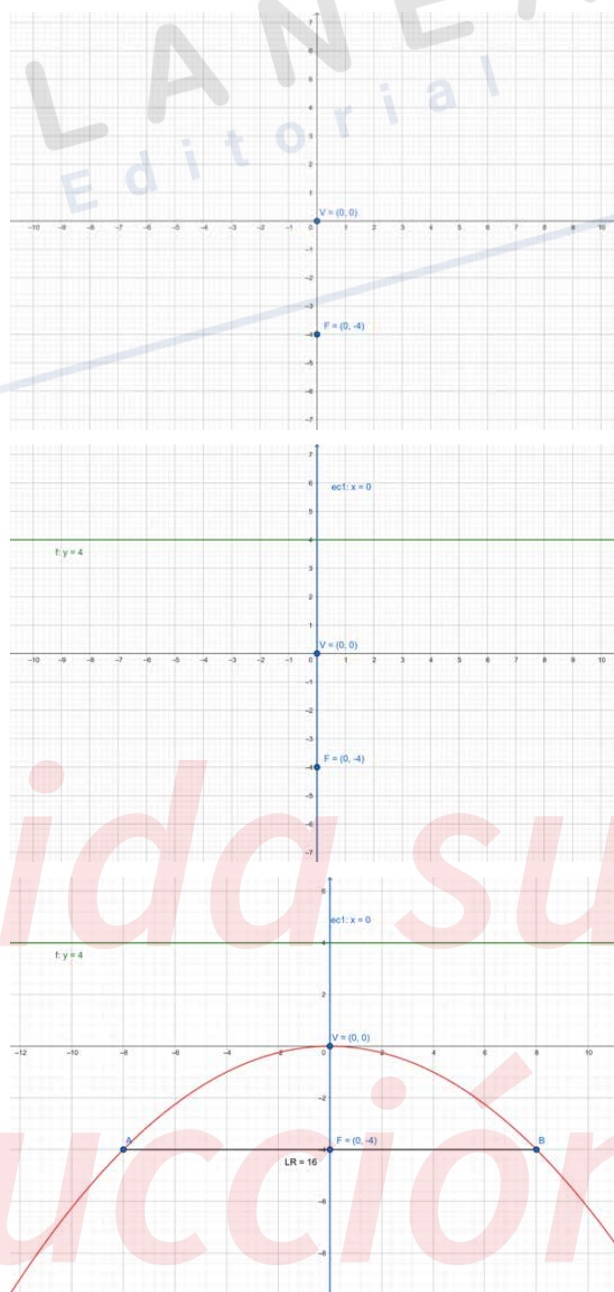
$$LR = |4p| = |4 \times -4| = 16 \text{ unidades}$$

La ecuación de la parábola es:

$$x^2 = 4py = 4(-4)y$$

$$x^2 = -16y$$

La gráfica queda:

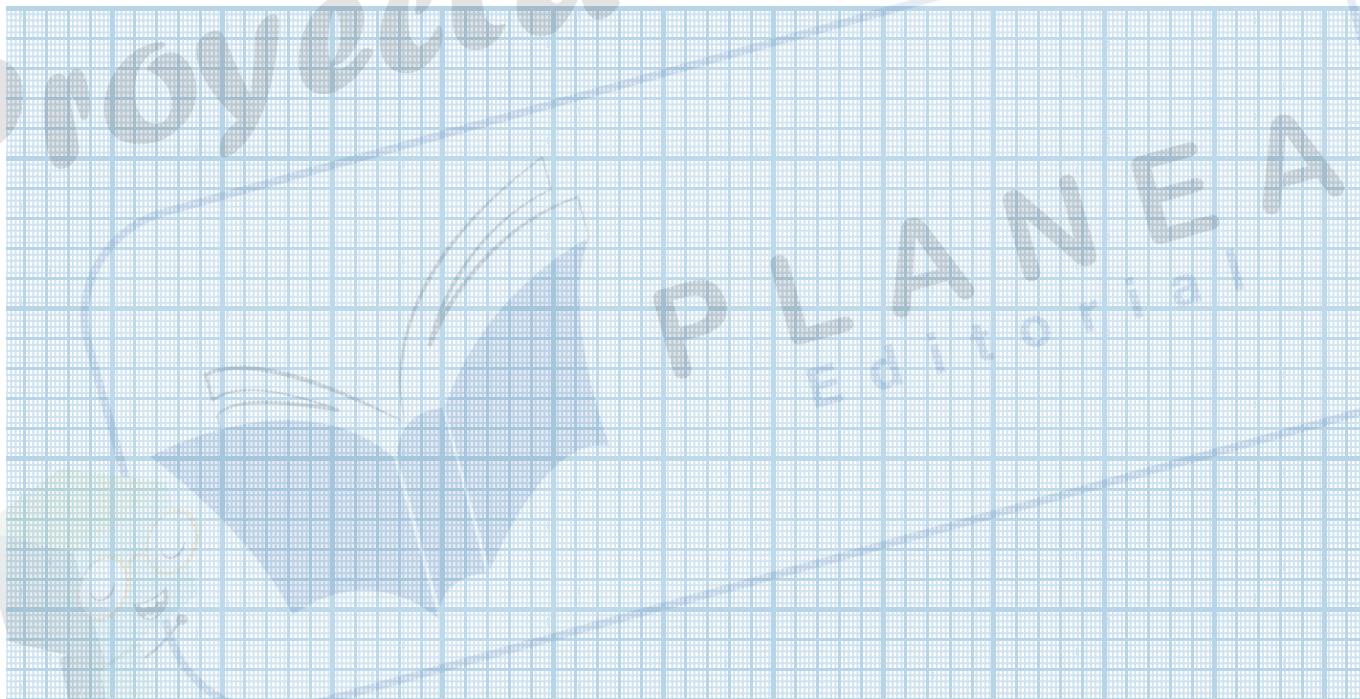


Prohibida su reproducción

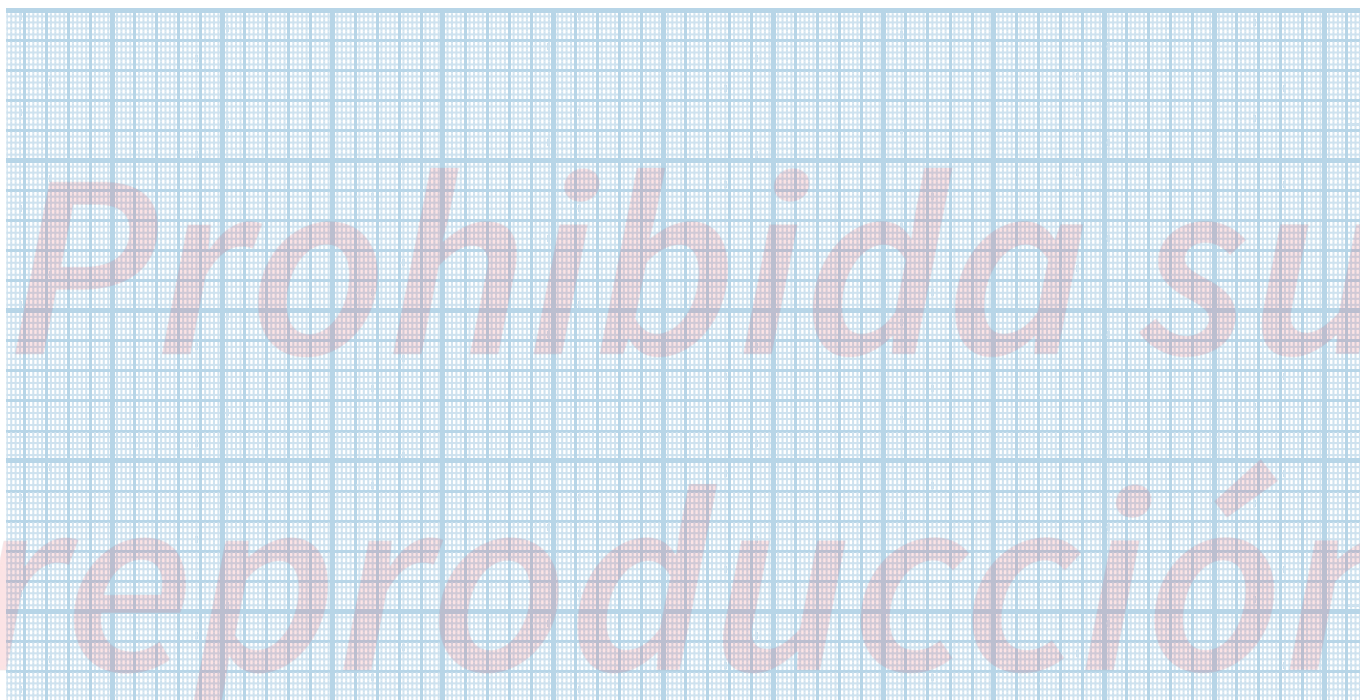


Encuentra los elementos, ecuación ordinaria y gráfica de las siguientes parábolas.

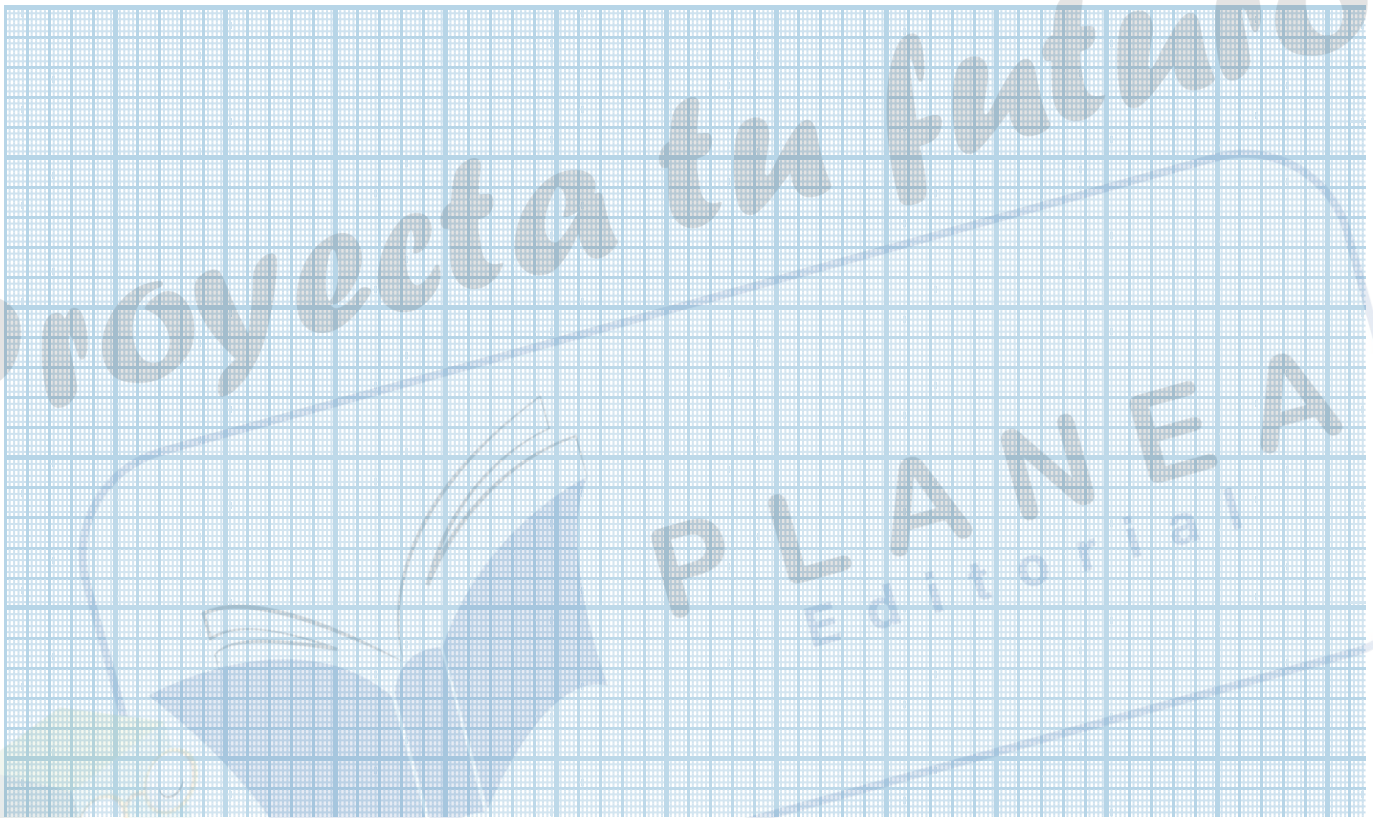
1. Vértice en el origen y foco en $F(0,2)$



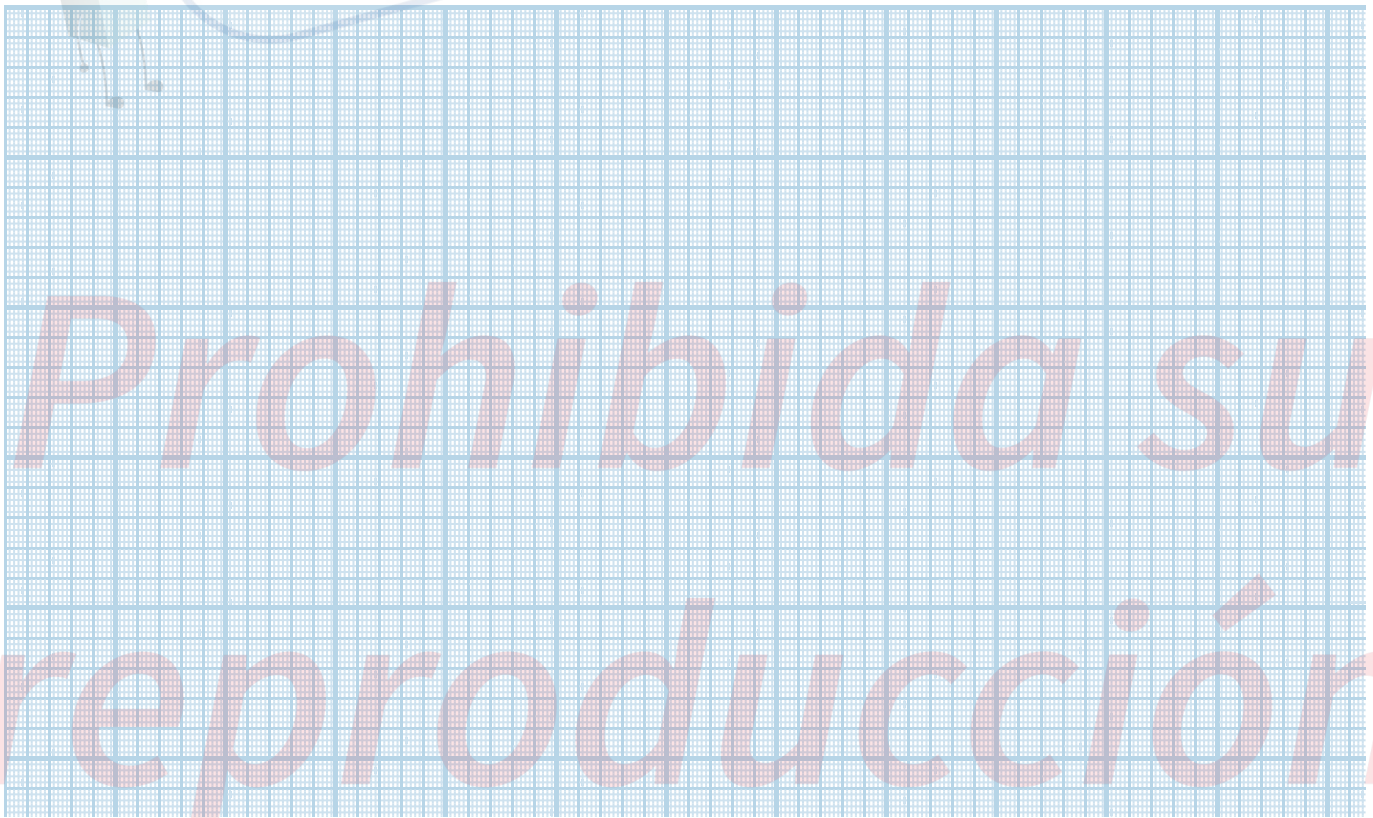
2. Vértice en el origen y directriz $y = 3$



3. Directriz $x = -4$ y vértice en el origen



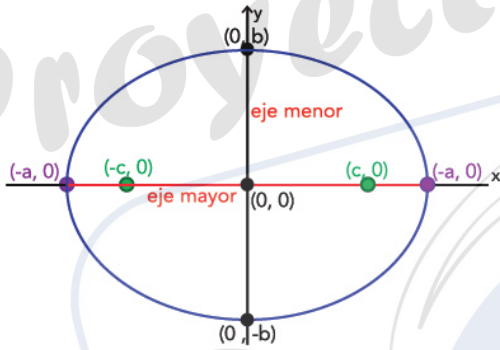
4. Vértice en el origen abre hacia arriba y $p = \frac{1}{2}$



Elipse

Una **elipse** es una figura geométrica que se asemeja a un círculo achatado o estirado, como la forma que tiene un huevo visto de frente, un plato ovalado o la sombra que proyecta una taza inclinada sobre la mesa, a diferencia del círculo, que tiene un radio constante, la elipse tiene dos “radios” principales: uno más largo y otro más corto, lo que le da su forma característica.

Elementos de una elipse



- ➔ **Focos (F_1 y F_2):** Dos puntos fijos dentro de la elipse, la suma de las distancias desde cualquier punto de la elipse hasta los dos focos siempre es constante.
- ➔ **Eje mayor:** El segmento más largo de la elipse, que pasa por los focos. Su longitud es $2a$, donde a es el semieje mayor.
- ➔ **Eje menor:** El segmento más corto, perpendicular al eje mayor en el centro. Su longitud es $2b$, donde b es el semieje menor.
- ➔ **Distancia focal ($2c$):** La separación entre los dos focos, donde c cumple la relación: $c^2 = a^2 - b^2$.

Si los focos están muy separados (c grande), la elipse es más alargada. Si están cerca (c pequeño), se parece más a un círculo.

Definición y fórmula de la elipse

La ecuación estándar de una elipse centrada en el origen $(0, 0)$ es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{si el eje mayor es horizontal})$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad (\text{si el eje mayor es vertical})$$

Donde:

- ✔ a es la distancia del centro al extremo del eje mayor (semieje mayor).
- ✔ b es la distancia del centro al extremo del eje menor (semieje menor).
- ✔ c es la distancia del centro a cada foco, cumpliendo $c^2 = a^2 - b^2$.

¿Qué pasa si se cambian los valores?

- ➔ Si $a > b$, la elipse es más ancha que alta.
- ➔ Si $b > a$, la elipse es más alta que ancha.
- ➔ Si $a = b$, la figura se convierte en un círculo.

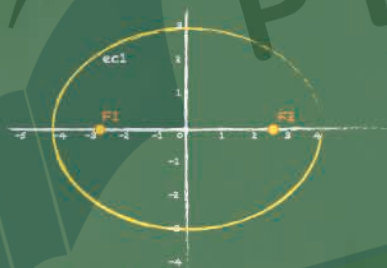
Ejemplo 1: Elipse horizontal

Ecuación: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

- $a^2 = 16$ $a = 4$ (eje mayor: de -4 a 4 en el eje X).
- $b^2 = 9$ $b = 3$ (eje menor: de -3 a 3 en el eje Y).
- $c = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7} \approx 2.65$ (focos en $(\pm 2.65, 0)$).

Pasos para dibujar:

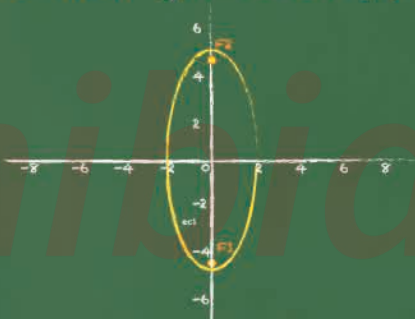
1. Marca el centro en $(0, 0)$.
2. Dibuja el eje mayor de 8 unidades (de -4 a 4 en X).
3. Dibuja el eje menor de 6 unidades (de -3 a 3 en Y).
4. Traza una curva suave uniendo los extremos.



Ejemplo 2: Elipse vertical

Ecuación: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$

- $a^2 = 25$ $a = 5$ (eje mayor vertical).
- $b^2 = 4$ $b = 2$ (eje menor horizontal).
- $c = \sqrt{25 - 4} = \sqrt{21} \approx 4.58$ (focos en $(0, \pm 4.58)$).



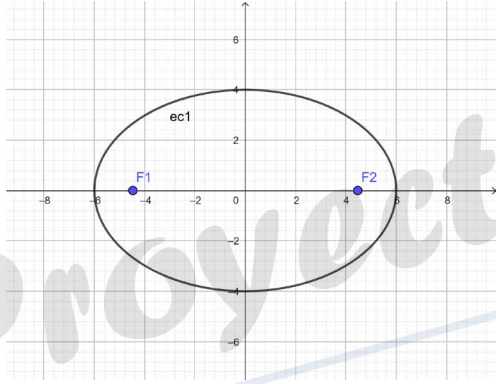
Actividad

Encuentra los ejes, focos y grafica la elipse.



Actividad

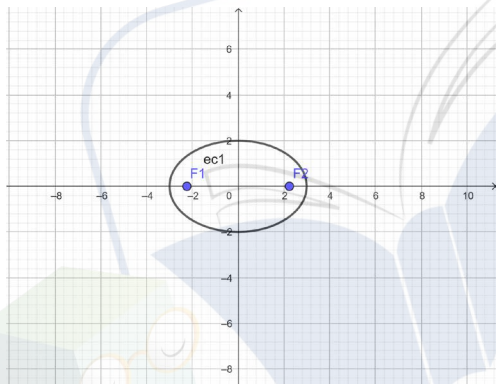
Encuentra los ejes, focos y grafica la elipse.



Ejercicio 1: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$

Solución:

- ➔ **a = 6** (eje mayor horizontal: **12 unidades**).
- ➔ **b = 4** (eje menor vertical: **8 unidades**).
- ➔ **c = $\sqrt{36 - 16} = \sqrt{20} \approx 4.47$** (focos en **($\pm 4.47, 0$)**).



Ejercicio 2: $\frac{(x)^2}{9} + \frac{(y)^2}{4} = 1$

Solución:

- ➔ **a = 3** (eje mayor horizontal: de **-3 a 3 en x**).
- ➔ **b = 2** (eje menor vertical: de **-2 a 2 en y**).
- ➔ **c = $\sqrt{9 - 4} = \sqrt{5} \approx 2.24$** (focos en **($\pm \sqrt{5}, 0$)**).

Inecuaciones en el plano cartesiano

Una ecuación, como $y = 2x$, es como una instrucción precisa y exacta: señala con exactitud dónde están los puntos que la cumplen, formando una línea recta que atraviesa el plano cartesiano, si se dibuja esa ecuación, cada punto sobre la línea es una solución, ni uno más ni uno menos, porque la igualdad no deja lugar a dudas: Y debe ser exactamente el doble de X .



Pero ¿qué pasa cuando en lugar de igualdad se habla de desigualdad? ahí entra la inecuación, como $y \geq 2x$, esta expresión ya no es una línea cerrada, sino una puerta abierta a infinitas posibilidades, en lugar de limitarse a los puntos justos sobre la recta, ahora se incluyen todos aquellos donde Y es mayor o igual que $2x$, gráficamente, la recta $y = 2x$ sigue ahí, pero ahora se debe sombread toda la región por encima de ella, porque cualquier punto en esa zona cumple la condición, la recta actúa como frontera: si la desigualdad es estricta ($y > 2x$), la línea se dibuja punteada para indicar que no incluye sus propios punto.

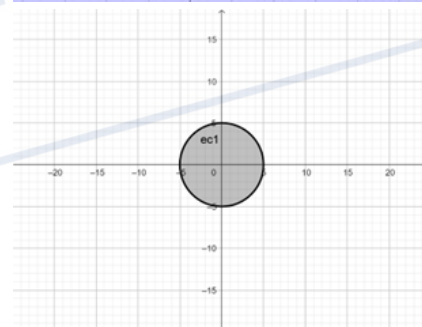
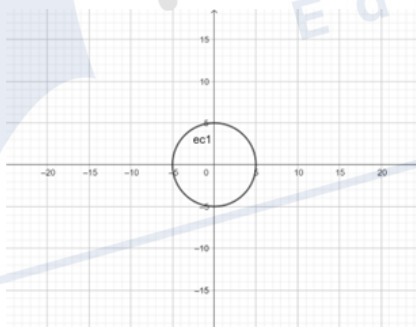
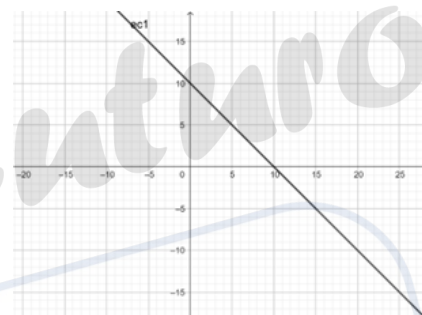


Si es inclusiva (\geq o \leq) ($y \geq 2x$), la línea es continua, mostrando que los puntos sobre ella también son válidos.

Para verlo más claro, piensa en un ejemplo cotidiano, si una ecuación como $x + y = 10$ representa todas las combinaciones exactas de dos números que suman 10 (como (2, 8) o (5, 5)), una inecuación como $x + y \leq 10$ describe todas las combinaciones donde la suma es **10 o menos**: (1, 5), (3, 2), incluso (0, 0). Esa flexibilidad es la magia de las inecuaciones: no definen un solo resultado, sino un abanico de posibilidades.

En el plano cartesiano, esto se traduce en que las ecuaciones dibujan contornos nítidos (una recta, una parábola, un círculo), mientras que las inecuaciones pintan áreas completas. Por ejemplo, la ecuación $x^2 + y^2 = 25$ traza un círculo perfecto de radio 5, pero la inecuación $x^2 + y^2 \leq 25$ sombrea todo el interior del círculo, incluyendo su borde.

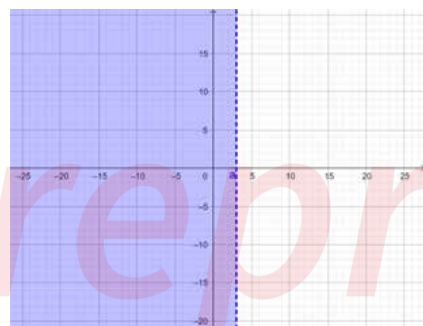
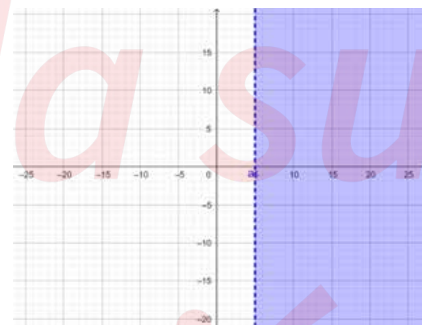
Esto es útil para modelar situaciones reales, como delimitar una zona de cobertura de una antena (todos los puntos dentro de un radio) o establecer límites de presupuesto (como $3x + 5y \leq 100$ para gastar menos de \$100 en dos productos).



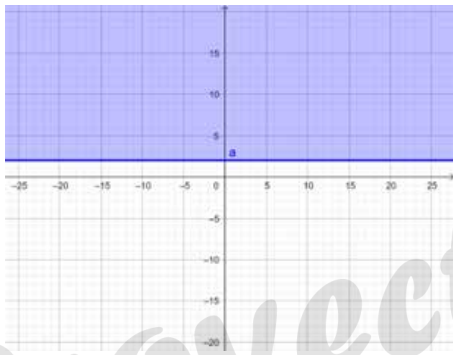
Desigualdades y sus signos

Imagina que las matemáticas no solo hablan de cantidades exactas, sino también de rangos, posibilidades y comparaciones, ahí es donde entran las desigualdades, que son como las hermanas flexibles de las ecuaciones, mientras que una ecuación como $3 + x = 7$ dice que X vale exactamente 4, una desigualdad como $3 + x < 7$ abre un mundo de respuestas válidas: cualquier número menor que 4, es como decir "no tengo la cantidad exacta, pero sé cuáles opciones son válidas y cuáles no".

Los signos de desigualdad son los símbolos que te permiten expresar estas relaciones, el más conocido es el "mayor que" ($>$), el cual indica que un valor es estrictamente superior a otro, por ejemplo, si $x > 5$, se está hablando de todos los números que están a la derecha del 5 en la recta numérica: 5.1, 6, 100, pero nunca el 5 mismo.



Su compañero, el "menor que" ($<$), hace lo contrario: $x < 3$ incluye 2.9, 0, -10, pero excluye al 3.



Pero a veces es necesario ser más inclusivos, y ahí entran los signos “mayor o igual que” (\geq) y “menor o igual que” (\leq), estos sí permiten que el número límite sea parte de la solución. Si decimos $y \geq 2$, se acepta tanto 2.1 como el propio 2, pero jamás 1.9.

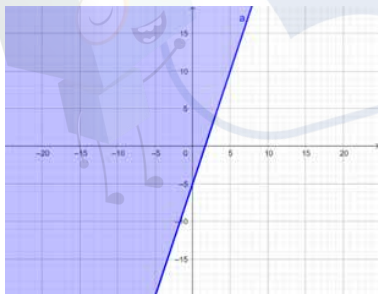
Es como cuando en un concurso dicen “participantes de 18 años o más”: si tienes 18, pasas; si tienes 17, no. Un ejemplo clásico es cuando se modelan situaciones reales: si se necesita que un tanque de agua tenga como máximo 100 litros, se escribiría capacidad ≤ 100 , porque 100 litros sería aceptable, pero 101 no.

Luego está el signo “diferente de” (\neq), que simplemente rechaza un valor específico sin decir nada sobre lo que está arriba o abajo, si coloca $z \neq 4$, se acepta 3.9, 5, -100, pero jamás el 4 exacto, este es útil cuando hay un valor prohibido, como en casos donde se divide entre una variable y no se puede permitir que sea cero.

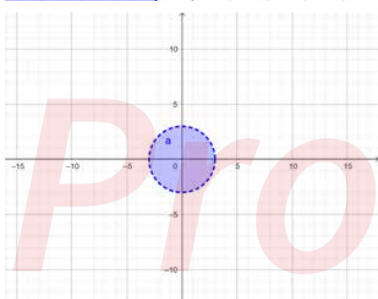
Para entender mejor estos conceptos, piensa en situaciones cotidianas, cuando se dice “la temperatura debe ser menor que 30°C ” ($T < 30$), estamos definiendo un límite estricto que no se puede alcanzar. En cambio, si un anuncio dice “apto para mayores de 12 años” (edad ≥ 12), el chico que cumple 12 hoy mismo puede entrar. Las desigualdades están en todas partes: desde los límites de velocidad hasta las restricciones de peso en un ascensor.

Tipos de inecuaciones

Cuando se trabaja con inecuaciones en el plano cartesiano, es sencillo encontrarse con dos grandes familias que, aunque comparten la esencia de representar desigualdades, tienen comportamientos gráficos muy distintos: las inecuaciones lineales y las no lineales.



Las inecuaciones lineales, como $3x - y \leq 5$, son las más sencillas de visualizar porque siempre generan semiplanos divididos por una recta. Si se toma este ejemplo, primero se graficará la recta equivalente $3x - y = 5$, que sería la frontera, y luego se determina qué lado del plano satisface la desigualdad. Una técnica útil es probar con el punto $(0, 0)$: al sustituir en $3(0) - 0 \leq 5$ se obtiene $0 \leq 5$, lo cual es verdadero, indicando que el área que contiene el origen es la solución. Esto demuestra cómo estas inecuaciones dividen el plano en dos regiones claramente delimitadas por una línea recta, siendo fundamentales en problemas de programación lineal donde se busca optimizar recursos dentro de ciertas restricciones.



Por otro lado, las inecuaciones no lineales, como $x^2 + y^2 < 9$, introducen a un mundo de formas más variadas y complejas, en este caso particular, la ecuación $x^2 + y^2 = 9$ representa un círculo con centro en el origen y radio 3, mientras que la inecuación describe todos los puntos dentro de ese círculo sin incluir el borde.

A diferencia de las lineales, estas inecuaciones pueden generar regiones circulares, parabólicas o incluso formas más exóticas, ampliando enormemente las posibilidades de modelado matemático. Por ejemplo, si quisieras representar el área de cobertura de una antena con cierto alcance, esta inecuación circular sería perfecta.

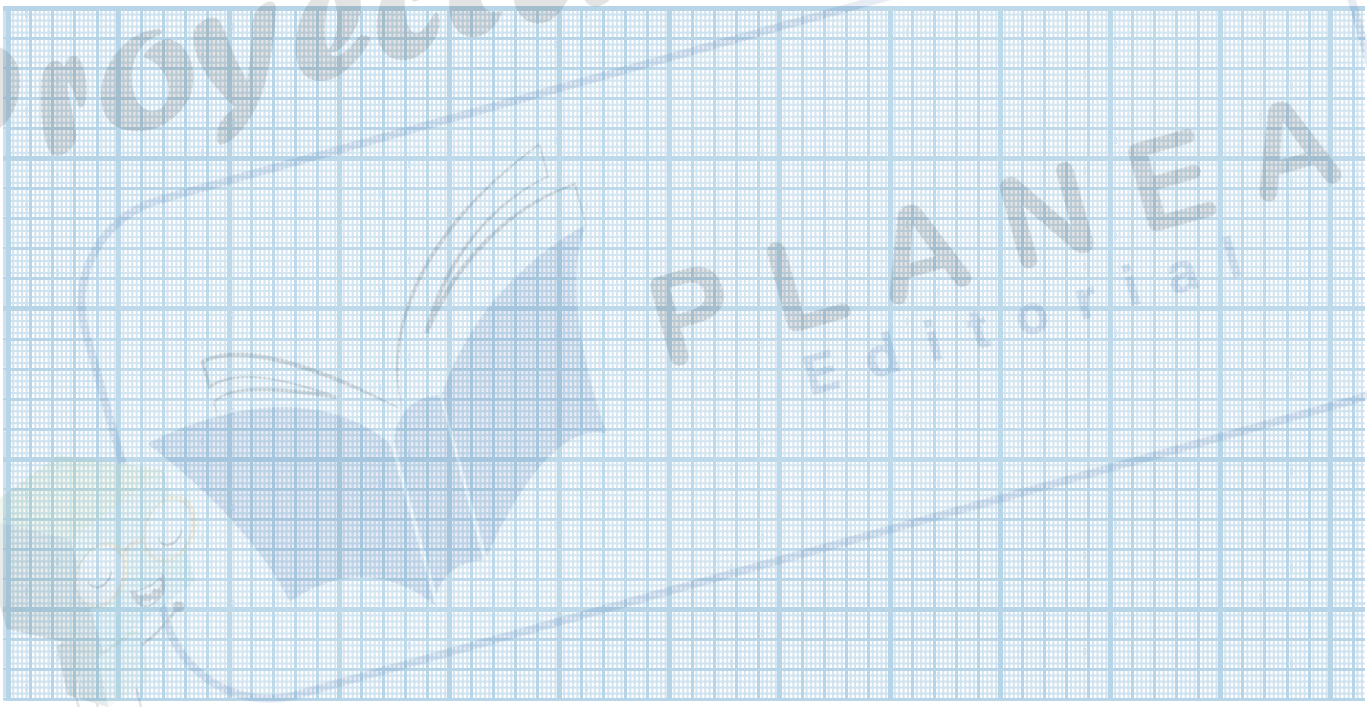
La belleza de estas diferencias se hace más evidente cuando se aplican a situaciones concretas. Imagina que estás diseñando un jardín: una inecuación lineal como $y \geq 2x$ podría definir la zona donde plantarás flores que necesitan mucha luz solar (por encima de cierta inclinación), mientras que una inecuación no lineal como $(x-4)^2 + (y-3)^2 \leq 4$ delimitaría un área circular alrededor de un árbol donde no puedes plantar porque sus raíces lo impiden.

 **Cierre**

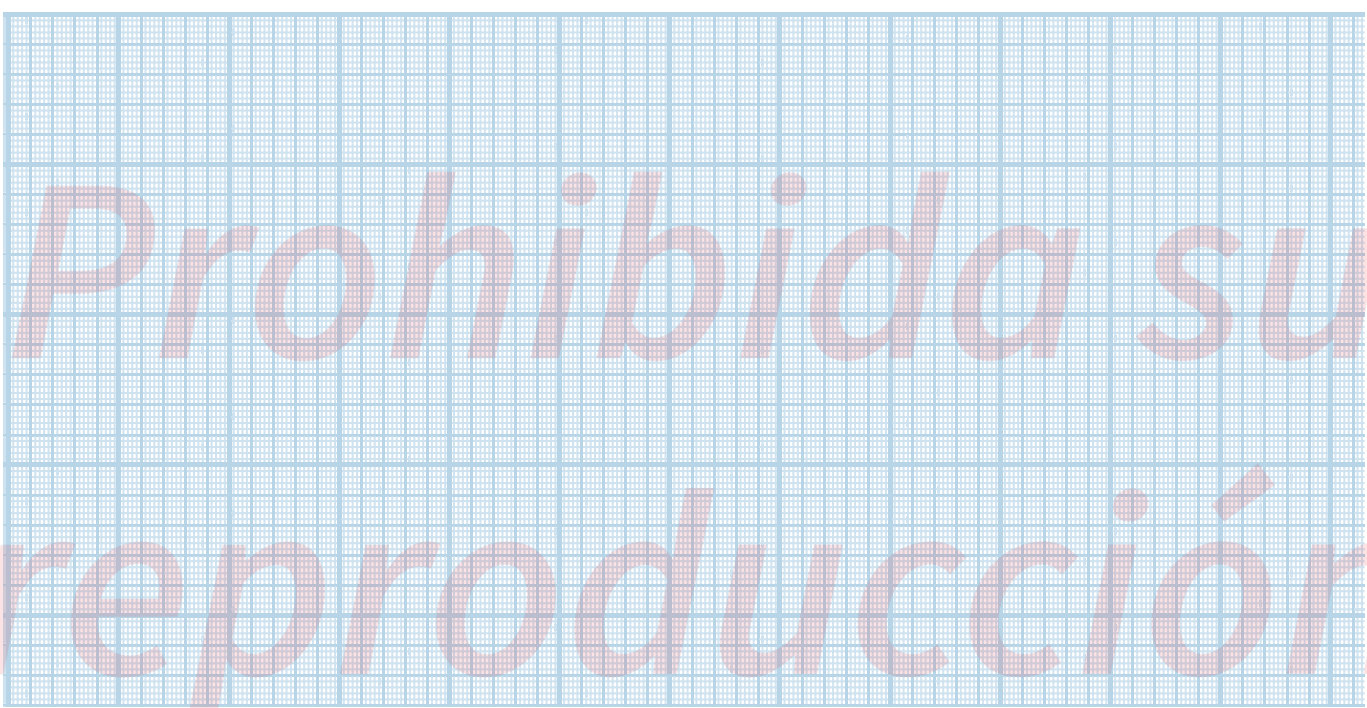
 **Práctica de aprendizaje** 

Realiza la gráfica de las siguientes inecuaciones en un plano cartesiano.

1. $y > 2x - 6$



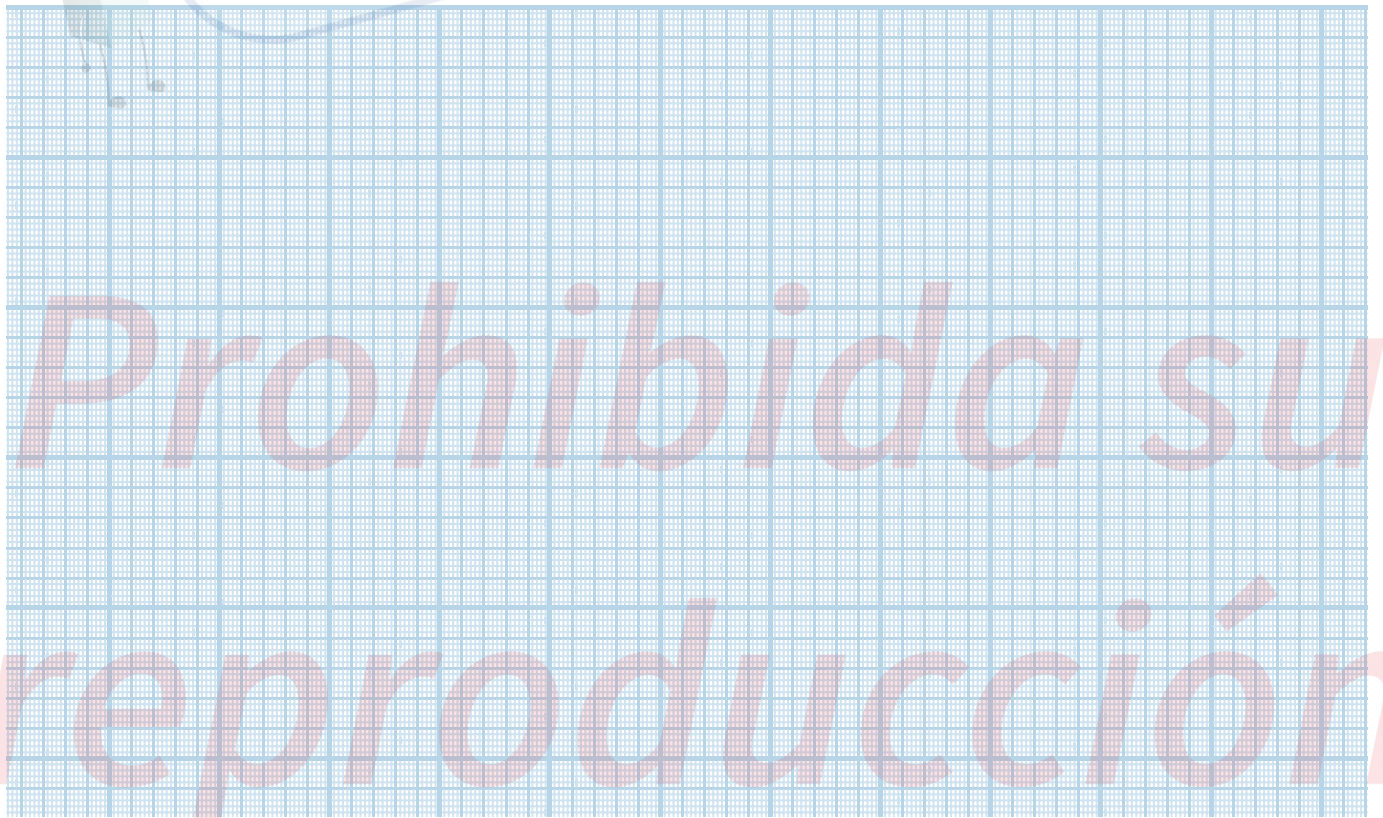
2. $x^2 + y^2 \geq 9$



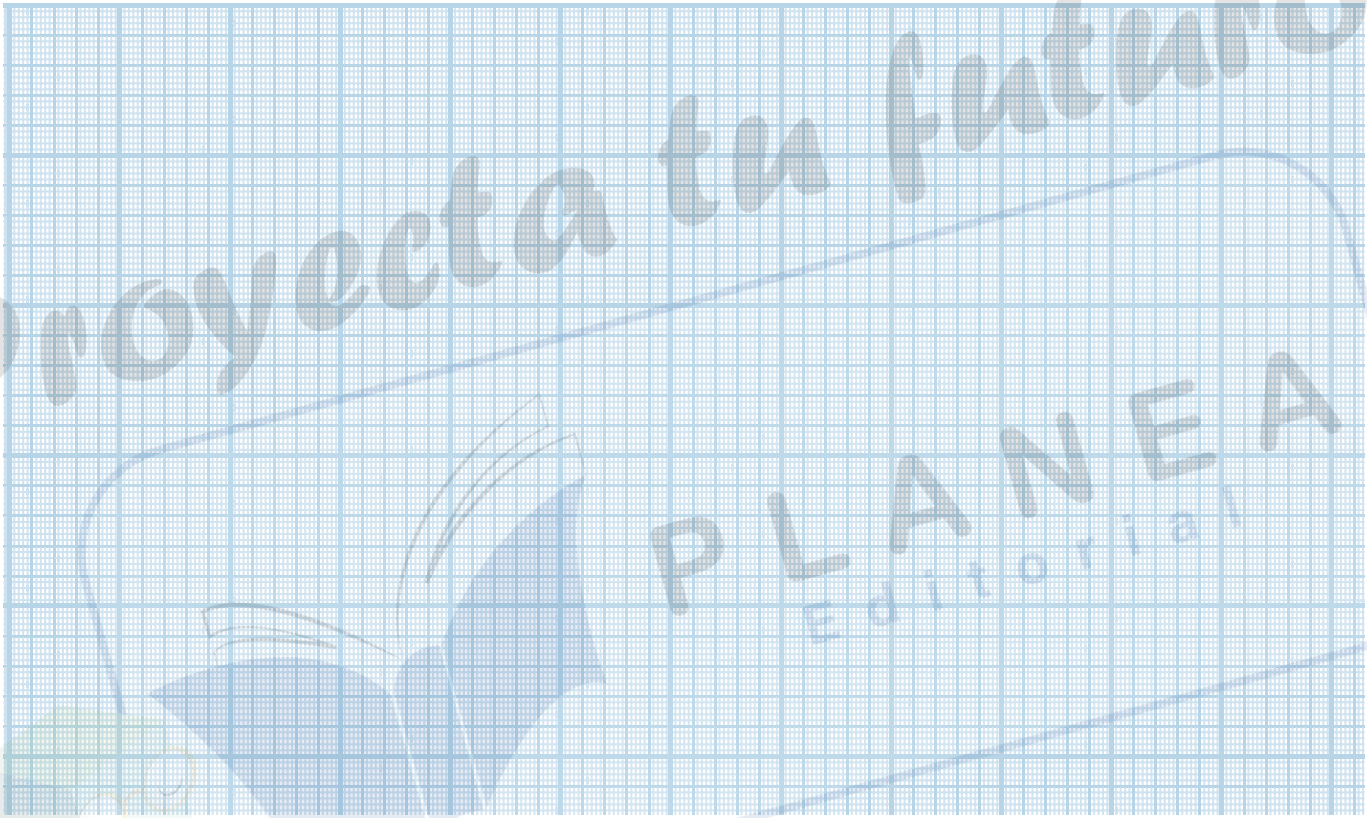
3. $y \geq x^2 - 4$



4. $x \geq y - 3$



5. $x^2 + y^2 - 4x + 4y < 8$



Operaciones

Prohibida su reproducción



Estudio independiente

Resuelve los siguientes planteamientos.

1. Un dron se mueve siguiendo una trayectoria parabólica en el plano cartesiano, cuya ecuación es $(y = -0.5x^2 + 4x)$. Describe algebraicamente su trayectoria y analiza su comportamiento.

2. Determina la región del plano que satisface la inecuación $(x^2 + y^2 \leq 25)$, y describe qué representa gráficamente.

3. Dos puntos en el plano cartesiano son $(A(3, 2))$ y $(B(7, 8))$. Calcula la pendiente y la distancia entre ellos, e interpreta el significado geométrico de estos valores.

Autoevalúa los aprendizajes de la progresión con la siguiente rúbrica.

Criterio	Nivel Básico	Nivel Intermedio	Nivel Avanzado
Expresión algebraica de trayectorias	Identifica de manera general el tipo de trayectoria sin relacionarla con ecuaciones algebraicas.	Representa la trayectoria con ecuaciones básicas, pero con errores en su formulación o interpretación.	Expresa correctamente la trayectoria con ecuaciones precisas, verificando su coherencia matemática.
Identificación de lugares geométricos y regiones en el plano	Reconoce algunas figuras y regiones sin vincularlas a ecuaciones o inecuaciones.	Formula ecuaciones o inecuaciones para describir lugares geométricos, pero con dificultades en la interpretación.	Describe con precisión lugares geométricos o regiones usando ecuaciones e inecuaciones correctamente formuladas.
Relaciones entre puntos y rectas en el plano cartesiano	Comprende de manera intuitiva la posición de puntos y rectas, pero sin usar relaciones algebraicas.	Calcula distancias y ángulos entre puntos y rectas utilizando relaciones matemáticas básicas.	Domina el cálculo algebraico de distancias, pendientes y ángulos, justificando los resultados con precisión.



Práctica transversal



El movimiento rectilíneo uniforme (MRU) es un tipo de movimiento que se caracteriza por tener una velocidad constante y moverse en una trayectoria recta. En este tipo de movimiento, el objeto recorre distancias iguales en tiempos iguales, lo que implica que no hay aceleración ni desaceleración.

Matemáticamente, el movimiento rectilíneo uniforme se puede describir con la siguiente ecuación:

$$v = \frac{d}{t}$$

Donde:

- ➔ v es la velocidad constante del objeto.
- ➔ d es la distancia recorrida.
- ➔ t es el tiempo empleado.

Tiempo (s)	Distancia (m)
0	0
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10

Para ilustrar mejor el concepto del movimiento rectilíneo uniforme, se puede realizar un experimento sencillo. Imagina que un carrito que se desplaza por una pista recta con una velocidad constante de 2 metros por segundo. La tabla de datos de distancia y tiempo son:

Realiza la gráfica de este movimiento, tomando en cuenta que el tiempo se encuentra en el eje X y la distancia en el eje Y.



Paec

Propiedades geométricas



Apertura

1

Enganchar

Imagina un mundo sin simetría: las mariposas tendrían alas desiguales, los rostros parecerían desbalanceados y hasta los edificios más famosos perderían su armonía. ¿Por qué algunas formas resultan tan placenteras a la vista? ¿Cómo es posible que un simple reflejo pueda crear figuras perfectas? La respuesta está en la magia de la geometría, que va mucho más allá de fórmulas y cálculos.

Al explorar la simetría y las transformaciones geométricas, descubrirás cómo las figuras pueden girar, reflejarse o cambiar de tamaño sin perder su esencia. Estos conceptos están presentes en el arte, la naturaleza, la arquitectura e incluso en los filtros de tus redes sociales favoritas. Cada vez que usas un efecto de espejo en una foto o admiras los patrones de un copo de nieve, estás viendo la geometría en acción.

Pero hay más. ¿Qué pasa cuando una línea se extiende infinitamente? ¿Por qué algunas curvas se acercan cada vez más a un límite sin nunca tocarlo? Esto es el comportamiento asintótico, un concepto que ayuda a entender desde el vuelo de un balón hasta el diseño de puentes colgantes. Los científicos e ingenieros usan estas ideas para predecir cómo se comportarán las cosas en situaciones extremas, y tú también podrás aplicarlas para resolver problemas.



Desarrollo

2

Explorar

Simetría y transformaciones geométricas

La geometría es una de las ramas más antiguas de las matemáticas, dedicada al estudio de las formas, las dimensiones y las propiedades del espacio que rodea. Nació como una herramienta práctica para medir terrenos y construir edificios en civilizaciones como la egipcia y la babilónica, pero con el tiempo evolucionó hasta convertirse en un lenguaje universal para entender patrones, estructuras y relaciones espaciales. Su nombre proviene de las palabras griegas *geo* (tierra) y *metron* (medida), lo que refleja sus orígenes en la necesidad humana de comprender y organizar el mundo físico.

La geometría no solo trabaja con números abstractos, sino con elementos visuales y tangibles: puntos, líneas, ángulos, superficies y volúmenes, por ejemplo, cuando observas un panal de abejas, sus celdas hexagonales no son casualidad; siguen principios geométricos que maximizan el espacio y la resistencia. Del mismo modo, los arquitectos usan la geometría para diseñar edificios estables, los ingenieros para crear puentes que soporten grandes cargas, y los artistas para lograr composiciones visualmente armoniosas.

Además, la geometría no se limita a lo visible, en la física moderna, conceptos geométricos ayudan a describir la curvatura del espacio-tiempo en la teoría de la relatividad, o la estructura de moléculas en la química, incluso en la era digital, algoritmos geométricos son esenciales para el renderizado 3D en videojuegos, el funcionamiento de los GPS y el desarrollo de inteligencia artificial.

Figuras geométricas

Las figuras geométricas son formas definidas por conjuntos de puntos, líneas o superficies que siguen reglas matemáticas precisas, estas formas están presentes en absolutamente todo lo que nos rodea, desde los objetos más simples hasta las estructuras más complejas de la naturaleza y el diseño humano, es posible encontrarlas en dos dimensiones (figuras planas) o en tres dimensiones (cuerpos geométricos), cada una con características y propiedades únicas.

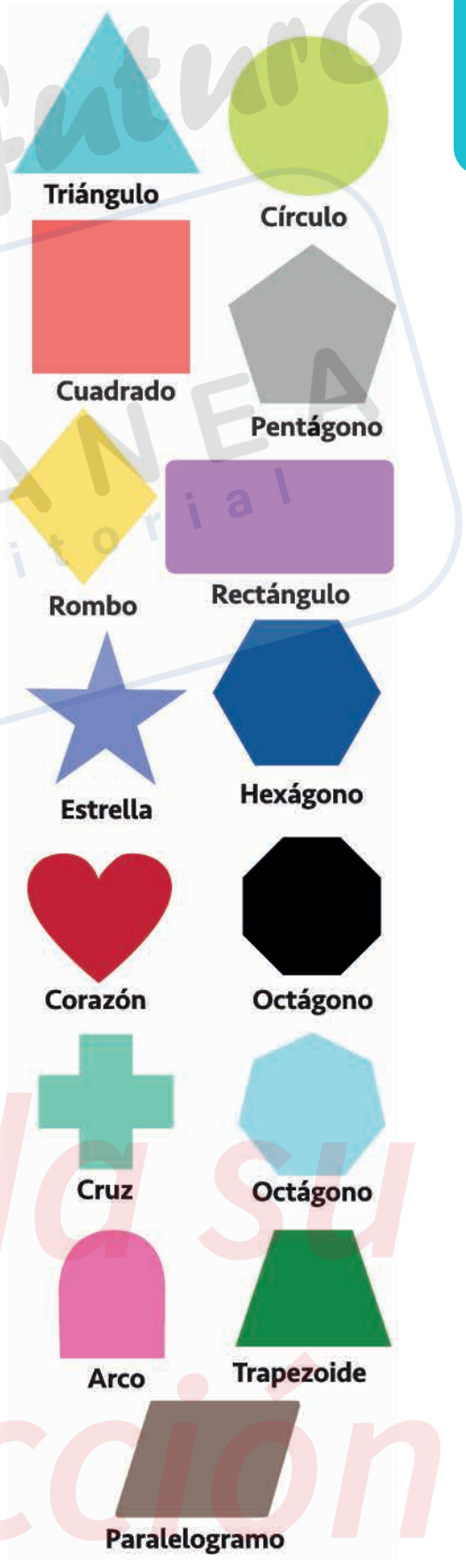
Cuando se habla de figuras planas, se hace referencia a formas que solo tienen largo y ancho, como el triángulo, el cuadrado o el círculo, aunque son figuras básicas, son importantes para entender conceptos más avanzados de geometría, por ejemplo, los triángulos son esenciales en ingeniería por su resistencia estructural, los cuadrados y rectángulos, con sus ángulos perfectos, son la base de la arquitectura y el diseño y los círculos, con su simetría perfecta, aparecen constantemente en la naturaleza y la tecnología.

Las figuras tridimensionales añaden profundidad a estas formas básicas, creando objetos que se pueden sostener y manipular en el mundo real. Un cubo, con sus seis caras cuadradas idénticas, es un excelente ejemplo de regularidad geométrica, la esfera, con su superficie perfectamente curva, representa la forma más eficiente en la naturaleza, como se puede ver en las gotas de agua o los planetas, otras formas como los cilindros, conos y pirámides demuestran cómo las figuras básicas pueden combinarse o evolucionar para crear estructuras más complejas.

Simetría

Imagina que doblas una hoja de papel por la mitad y pintas solo un lado, al desdoblarla aparece una figura perfecta, como las alas de una mariposa o la letra "M" del logo de McDonald's. Esto es la simetría axial, donde una figura se divide en dos partes idénticas que son como reflejos en un espejo, este tipo de simetría está presente en casi todo lo que te rodea: en el cuerpo humano (si trazas una línea vertical por la nariz), en las hojas de los árboles, e incluso en los edificios más famosos como el Taj Mahal. Cuando encuentras esta simetría, te produce una sensación de equilibrio y belleza que el cerebro reconoce inmediatamente como algo armonioso.

Pero la simetría no solo funciona como un espejo, también puede girar, piensen en una estrella de mar o en el símbolo de una rueda: si las haces girar un poco, vuelven a verse iguales. Esto es la simetría rotacional, donde una figura mantiene su aspecto al rotarla cierto número de grados, el círculo es el campeón de esta simetría, pues se puede girar cualquier cantidad y siempre se verá igual, mientras que una estrella de cinco picos necesita exactamente 72 grados para coincidir consigo misma, esta propiedad se ocupa para el diseño de engranajes, turbinas y hasta en la colocación de los pétalos de las flores, donde la naturaleza aprovecha esta simetría para crear patrones eficientes.



Existe otro tipo de simetría menos evidente pero igual de importante, la simetría traslacional. Imaginen un ejército de hormigas marchando en línea recta, o los azulejos repetidos en el piso de un baño, aquí no hay giros ni reflejos, sino repetición pura del mismo patrón una y otra vez. Esta simetría es la base de los mosaicos árabes, los diseños de papel tapiz y hasta en la estructura cristalina de los minerales. Lo fascinante es que el cerebro puede detectar estos patrones rápidamente, lo que explica por qué son tan atractivos los diseños con repeticiones ordenadas en la ropa, la decoración o el arte.

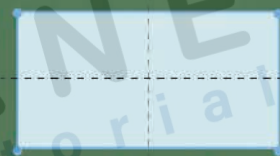
Procedimiento para calcular ejes de simetría

Calcular los **ejes de simetría** en una figura geométrica implica identificar líneas que dividen la figura en dos partes idénticas y reflejadas. Aquí tienes el procedimiento paso a paso:

Procedimiento para determinar los ejes de simetría

1. Identificar la figura geométrica.

Cada figura tiene un número específico de ejes de simetría:
Cuadrado \rightarrow 4 ejes (dos diagonales y dos centrales).



Rectángulo \rightarrow 2 ejes (vertical y horizontal).



Círculo \rightarrow Infinitos ejes (cualquier línea que pase por el centro)



Triángulo equilátero \rightarrow 3 ejes (desde cada vértice al punto medio del lado opuesto).



Triángulo isósceles \rightarrow 1 eje (vertical, pasando por el vértice superior).

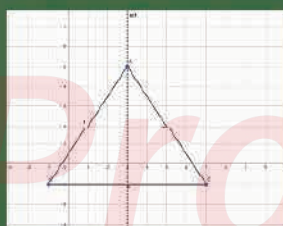
2. Buscar simetría visual.

Dibuja la figura en un papel o usa un software de geometría.

Pliega o imagina doblando la figura a lo largo de una línea. Si ambas mitades coinciden con exactitud, ese es un eje de simetría.

3. Usa coordenadas para validación matemática

Si la figura está en el plano cartesiano, verifica las condiciones:



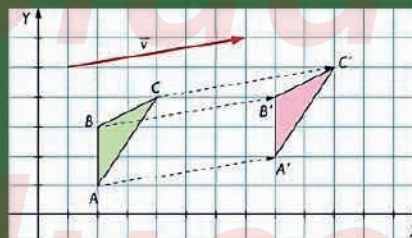
Un eje de simetría es una línea vertical ($x = a$) u horizontal ($y = b$) que divide la figura en partes iguales.

En formas más complejas, usa ecuaciones de reflexión para comprobar si cada punto se refleja en otro.

4. Experimenta con traslaciones y reflexiones.

Usa un espejo o papel transparente para probar los ejes de simetría visualmente.

En software gráfico, aplica la simetría axial para verificar los ejes.



Transformaciones geométricas

Traslación

Imagina que tienes un dibujo de tu personaje favorito en una hoja de papel, y quieren moverlo sin cambiar nada más, simplemente desplazarlo a otro lugar de la página. Esto que acaban de hacer mentalmente es una traslación, uno de los movimientos más básicos pero importantes en geometría, cuando trasladas algo, como cuando empujas una silla por el piso sin girarla ni inclinarla, manteniendo todas sus características iguales, solo cambia su posición. Los arquitectos usan constantemente este concepto cuando diseñan edificios con ventanas o columnas repetidas a lo largo de una fachada, y en la naturaleza se observa cuando las hormigas marchan en fila manteniendo la misma distancia entre ellas.

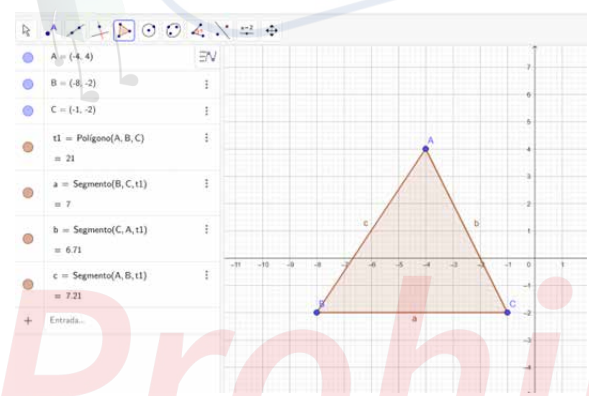
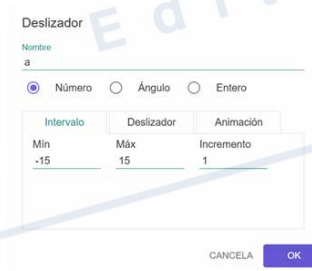
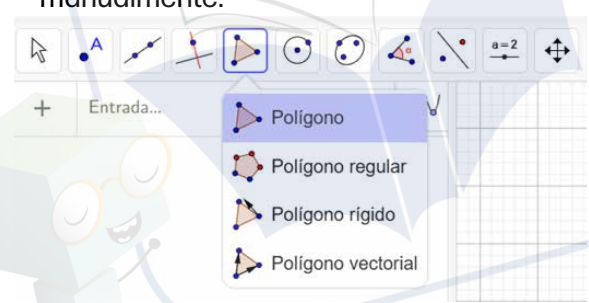
3 Explicar



Refuerza el tema de traslación observando del video del código QR.

Pasos para realizar una traslación en GeoGebra

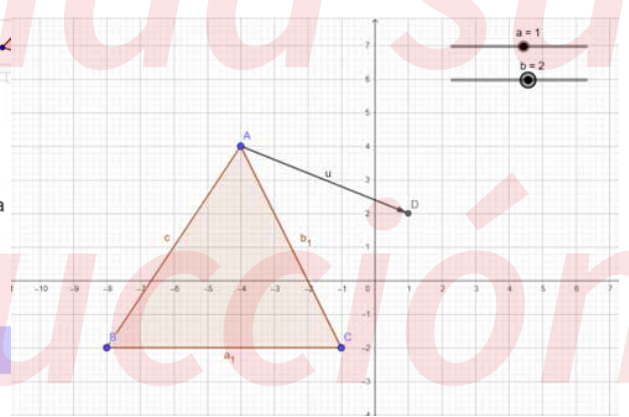
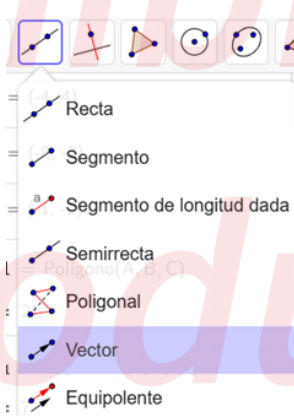
1. Dibujar la figura. Usa la herramienta de polígono o introduce las coordenadas de los vértices manualmente.
2. Crea dos deslizadores para realizar la traslación del vector.



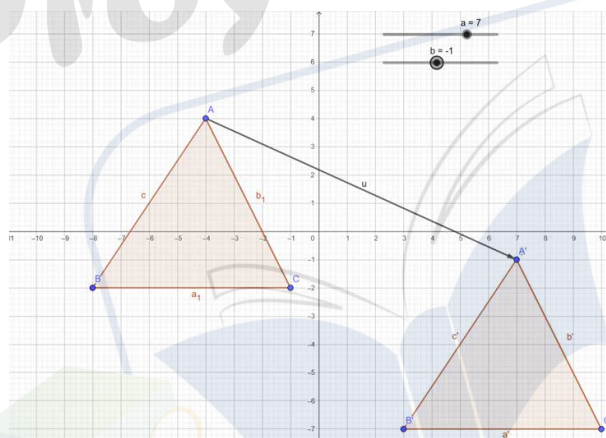
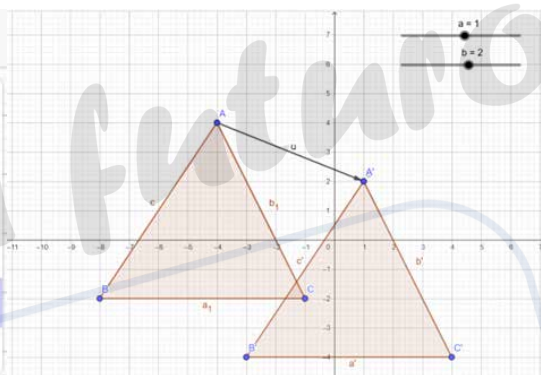
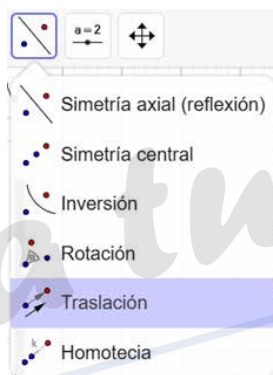
3. Introduce un nuevo punto con las coordenadas (a, b) que corresponde a las letras con las que se definieron los deslizadores.



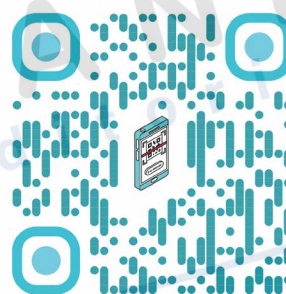
4. Crear el vector de traslación. Define un vector con las coordenadas al punto (a, b), donde "a" indica el desplazamiento horizontal y "b" el vertical.



5. Aplicar la traslación. Usa la herramienta de traslación seleccionando la figura y el vector.



6. Verificar la nueva posición. Observa cómo los puntos de la figura se han desplazado según el vector.

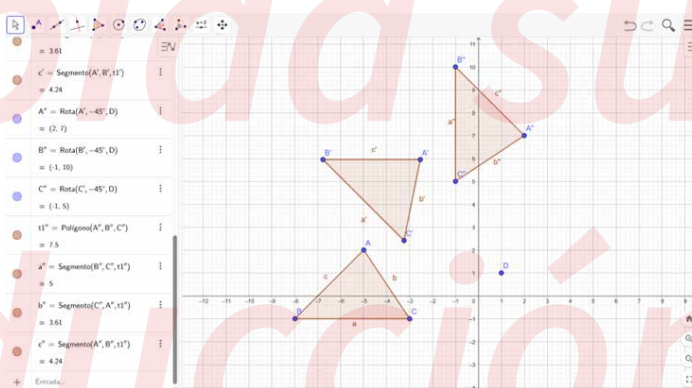


Rotación

Ahora piensa en las manecillas de un reloj, que giran alrededor de su centro sin moverse de su lugar, o en las ruedas de una bicicleta cuando pedaleas. Esto es la rotación, donde todos los puntos de un objeto giran alrededor de un punto fijo llamado centro de rotación, lo interesante es que, aunque el objeto cambie de orientación, su forma y tamaño permanecen iguales. En el arte, las mándalas son un excelente ejemplo de cómo la rotación puede crear diseños hermosos y complejos a partir de figuras simples que se repiten girando, incluso el planeta Tierra experimenta esta transformación cada día al rotar sobre su eje, dándonos la sucesión de días y noches.

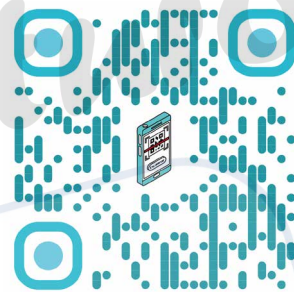
Pasos para realizar una rotación en GeoGebra

1. Dibujar la figura.
2. Seleccionar el centro de rotación: Define un punto fijo alrededor del cual girará la figura.
3. Elegir la herramienta de rotación: En la barra de herramientas, selecciona la opción de "Rotar alrededor de un punto".
4. Especificar el ángulo de rotación: Ingresas el valor del ángulo en grados y elige el sentido del giro (positivo para antihorario, negativo para horario).
5. Aplicar la transformación: Confirma la rotación y observa cómo la figura se ha desplazado.



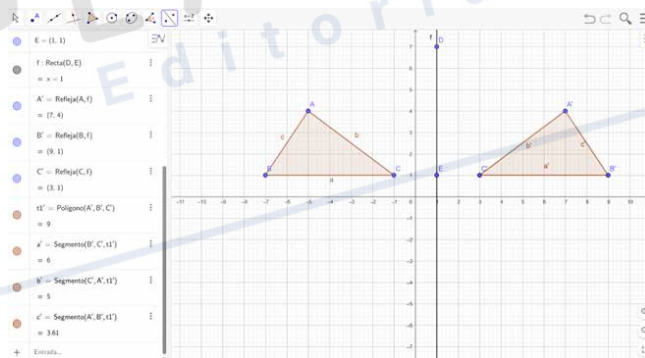
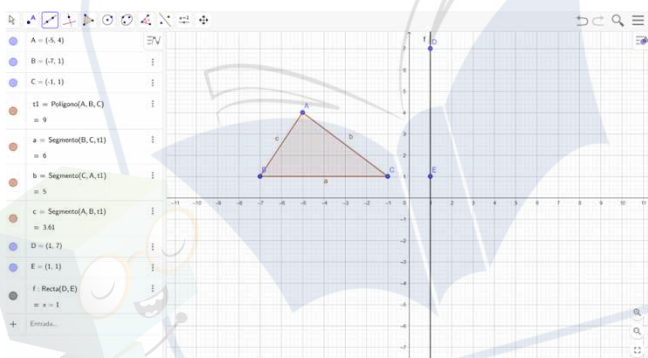
Reflexión

Cuando las personas se miran al espejo por la mañana, están interactuando con una reflexión, otra transformación geométrica. Aquí la imagen se voltea sobre una línea imaginaria (el eje de simetría), creando una versión especular de nosotros mismos. Los diseñadores de aviones aprovechan esta propiedad cuando crean las alas, que son reflejos exactos una de la otra, y los artistas la usan al componer obras simétricas que resultan visualmente impactantes. Un dato curioso es que, aunque parezca que la reflexión simplemente “voltea” las cosas, en realidad es una transformación más compleja que cambia la orientación de las figuras, como cuando escribes algo y al reflejarlo en el espejo se ve al revés.

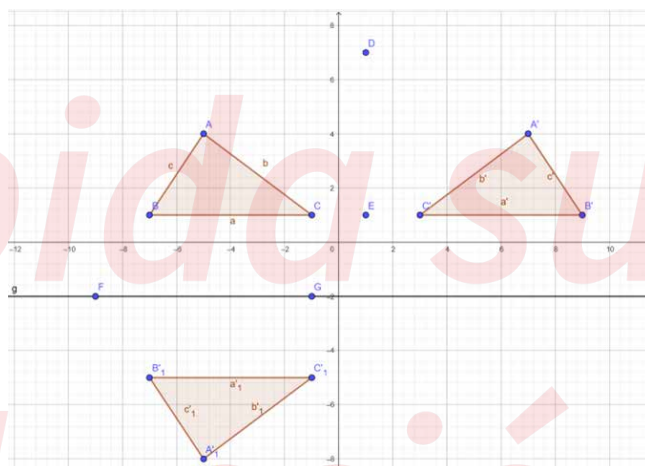
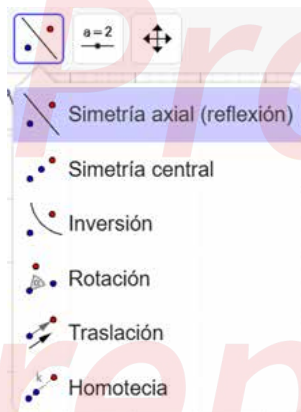
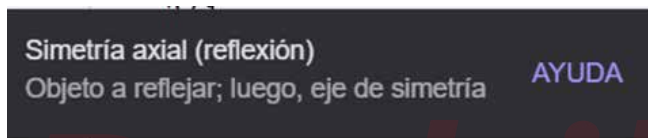


Pasos para realizar una reflexión en GeoGebra

1. Dibujar la figura.
2. Definir el eje de reflexión. Dibuja una línea que servirá como eje de simetría.
3. Seleccionar la herramienta de reflexión. En la barra de herramientas, elige la opción “Reflejar respecto a una recta”.
4. Aplicar la transformación. Selecciona la figura y luego el eje de reflexión para generar la imagen reflejada.
5. Verificar la simetría. Observa cómo la figura reflejada mantiene la misma forma y tamaño, pero en posición invertida.



3. Seleccionar la herramienta de reflexión. En la barra de herramientas, elige la opción “Reflejar respecto a una recta”.



Prohibida su reproducción



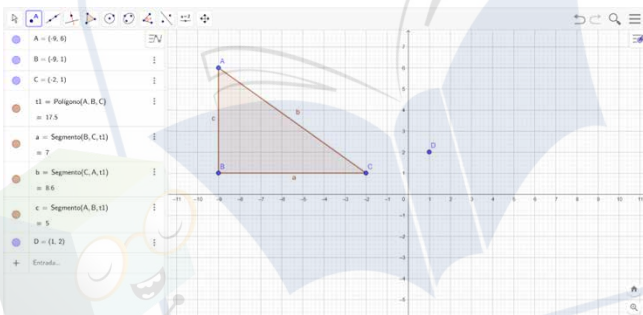
Homotecia

La homotecia es como hacer zoom a una imagen o crear una maqueta a escala, cuando aumentas o disminuyes el tamaño de una figura pero mantienes todas sus proporciones exactamente iguales, estas aplicando esta transformación. Los cartógrafos la usan de manera constante al crear mapas que representan ciudades o países completos en tamaños manejables, y los cineastas la emplean cuando hacen miniaturas de edificios para películas que luego parecen reales en pantalla. En la vida diaria, cada vez que haces un gesto de pellizco para ampliar una foto en el celular, estas comandando una homotecia digital.

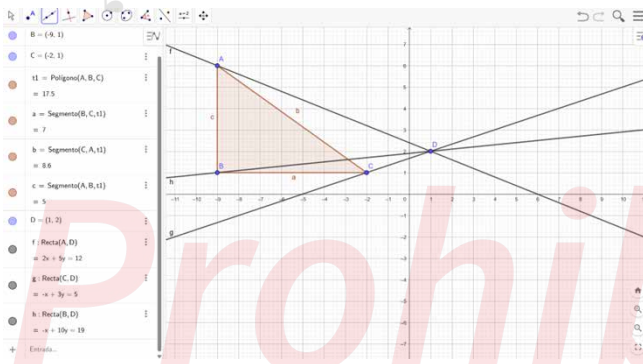
Pasos para realizar homotecia en GeoGebra.

1. Dibujar la figura.

2. Definir el centro de homotecia: Selecciona un punto que servirá como referencia para la transformación.



3. Trazar líneas de cada vértice del polígono al punto centro de la homotecia.



4. Insertar un Deslizador. Insertar la herramienta deslizador con un incremento de 0.1.

Deslizador

Nombre
d = 1

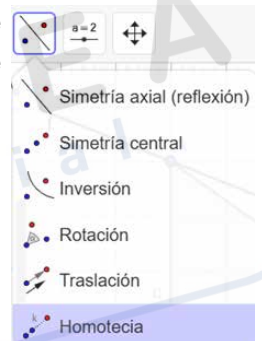
Número Ángulo Entero

Intervalo Deslizador Animación

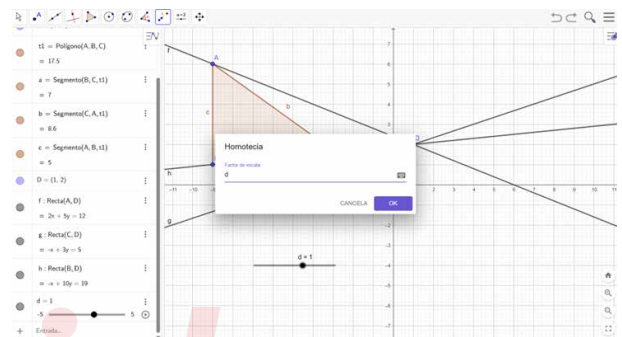
Min	Máx	Incremento
-5	5	0.1

CANCELAR OK

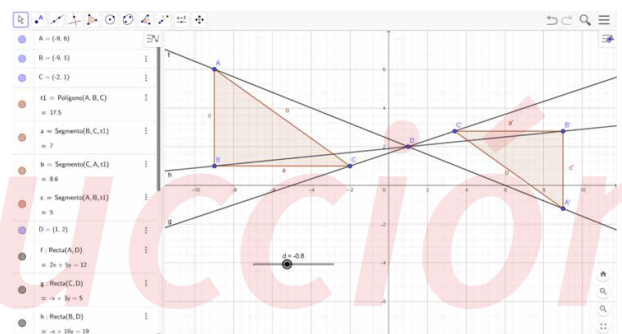
5. Elegir la herramienta de homotecia: En la barra de herramientas, selecciona la opción "Homotecia".



6. Se selecciona el polígono, el punto centro y se especifica la razón de semejanza asignando el valor de la letra del deslizador (d).



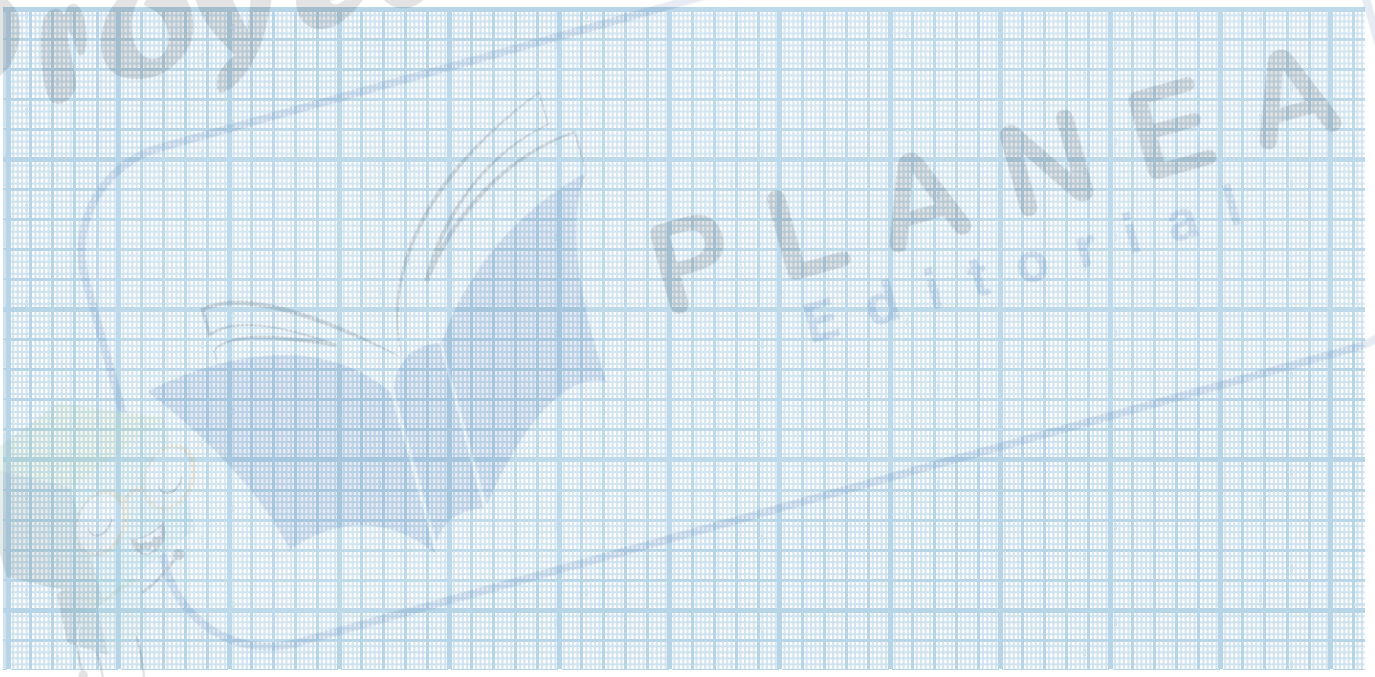
7. Aplicar la transformación: Selecciona la figura y el centro de homotecia para generar la imagen transformada.



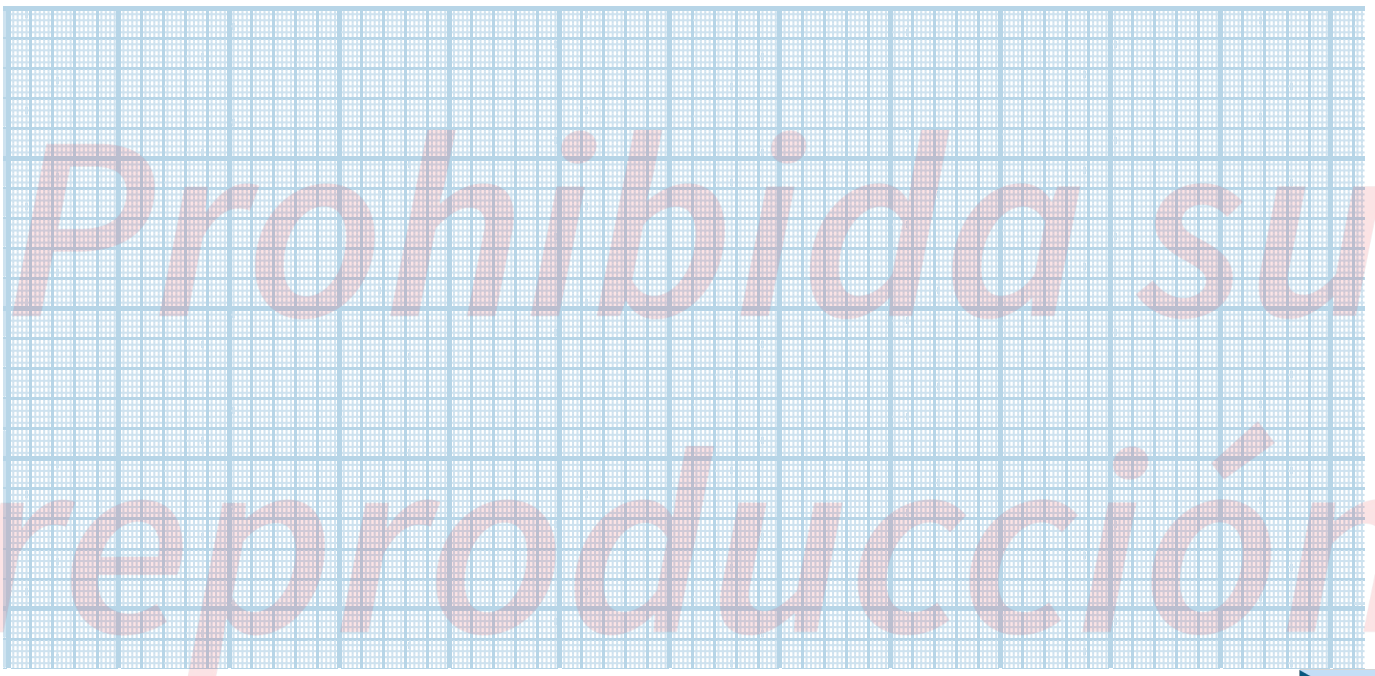
Práctica de aprendizaje  **No. 9** 

Realiza las siguientes transformaciones geométricas con ayuda del programa GeoGebra, al final comparte los archivos generados en aplicación por medio de correo electrónico a tu maestra(o).

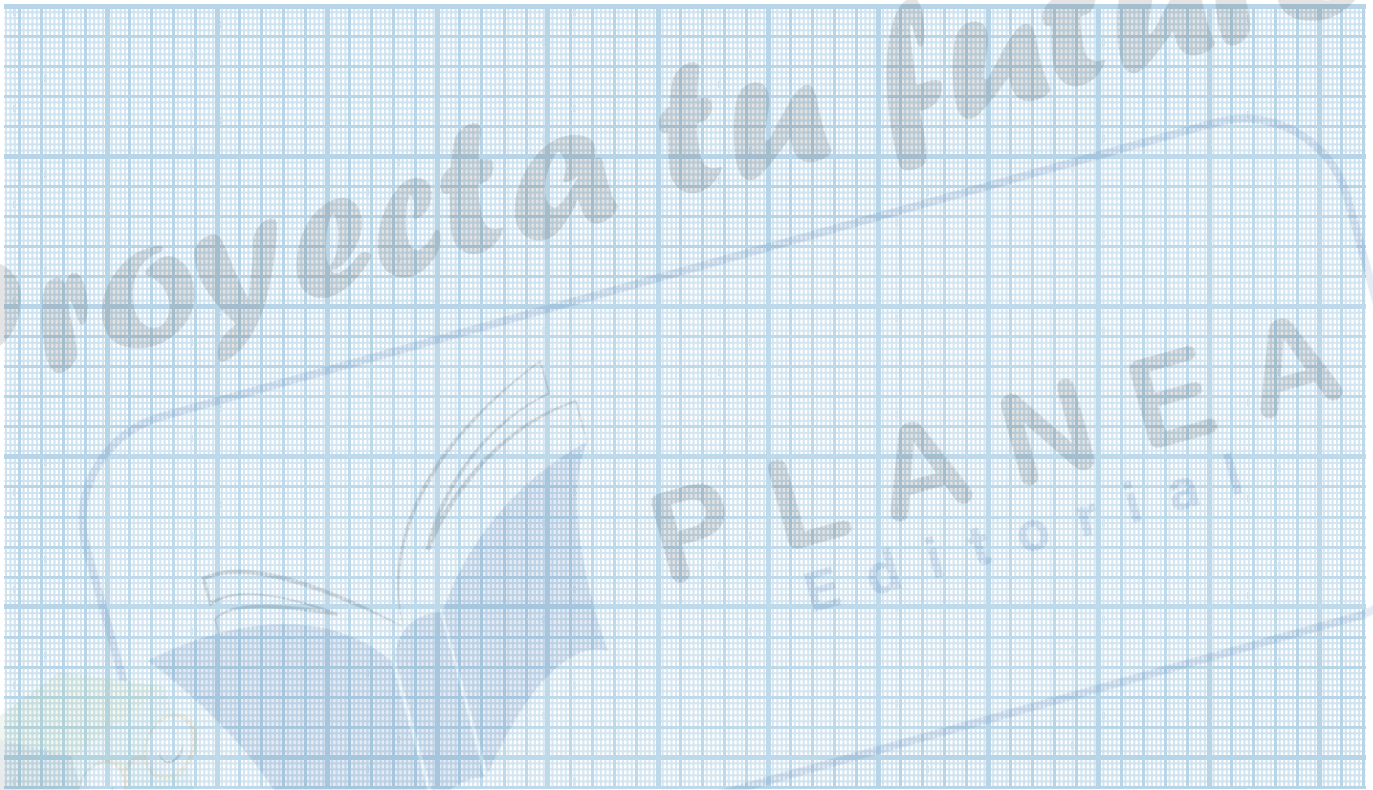
- 1. Traslación.** Dibuja un triángulo con vértices en $A(1,2)$, $B(3,4)$ y $C(5,1)$. Luego, trasládalo utilizando el vector ¿Cuáles son las coordenadas de los nuevos puntos?



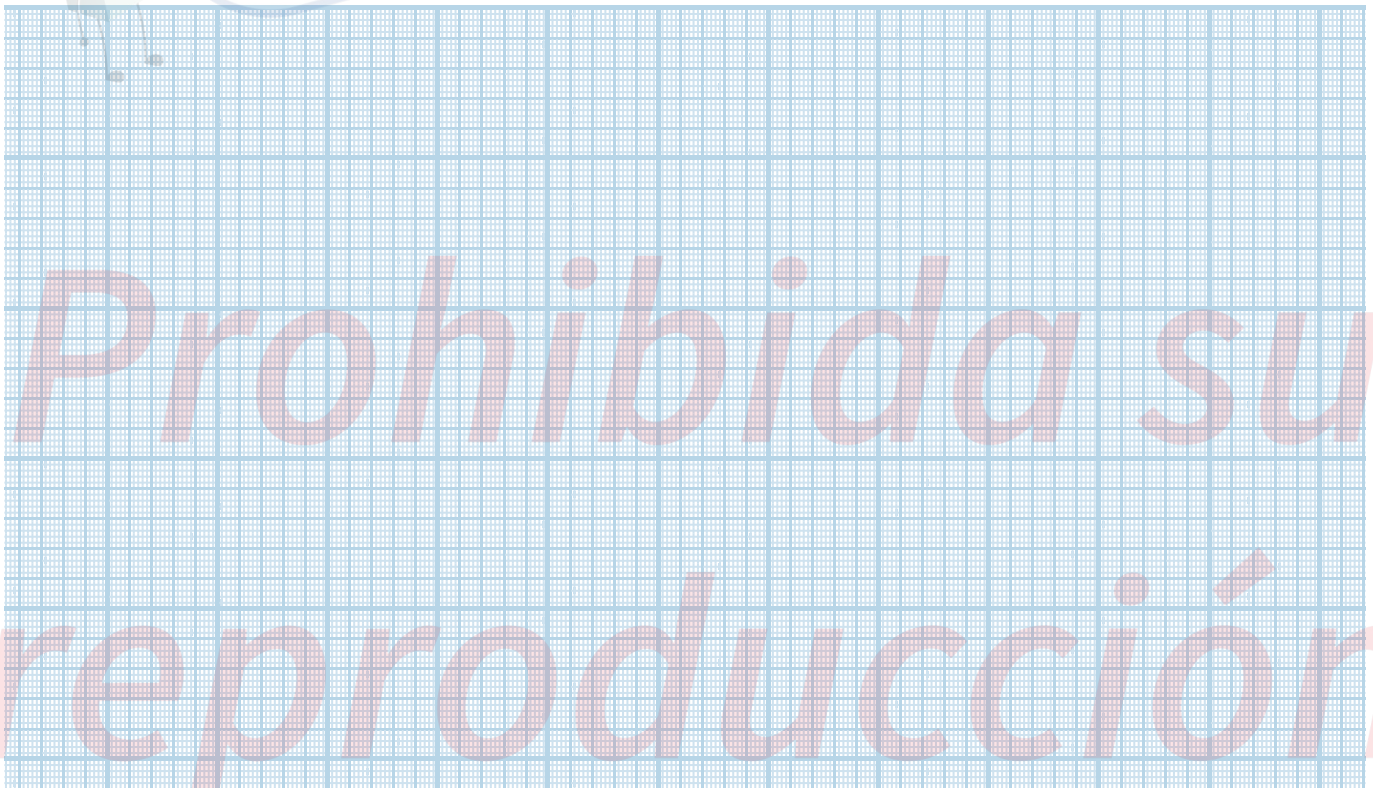
- 2. Rotación.** Dibuja un cuadrado con vértices en $P(2,2)$, $Q(5,2)$, $R(5,5)$ y $S(2,5)$. Rótalo 30° en sentido antihorario con respecto al punto $O(2,2)$. ¿Cuáles son las coordenadas de la figura rotada?



3. Reflexión. Dibuja un polígono con vértices en $X(1,3)$, $Y(4,6)$ y $Z(1,6)$. Luego, refléjalo respecto a la recta ($y = x$). ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos reflejados?



4. Homotecia. Dibuja un pentágono con vértices en $A(0,0)$, $B(2,1)$, $C(3,3)$, $D(1,4)$ y $E(-1,2)$. Aplica una homotecia con centro en $O(-1,-1)$ y razón ($k = 2$). ¿Cuáles son las coordenadas de la figura transformada?



Extensión y comportamiento asintótico

La extensión en geometría revela hasta dónde llegan las formas y cómo ocupan el espacio que las contiene, se puede entender como el estudio de los alcances y límites de las figuras, tanto en su tamaño como en su comportamiento cuando se aproximan a los bordes de su existencia matemática.

Piensa en una simple línea recta dibujada en un papel, su extensión parece clara: comienza en un punto y termina en otro, pero ¿qué ocurre si esa línea continua infinitamente en ambas direcciones? aquí la extensión adquiere un nuevo significado, transformándose en un concepto que explora lo ilimitado. Este tipo de reflexión lleva a preguntas fundamentales: ¿Hasta dónde puede crecer una figura? ¿Cómo se comporta cuando se acerca a sus fronteras?

En el caso de las funciones matemáticas, la extensión se manifiesta a través de tres aspectos clave:

- ➔ **Dominio y recorrido:** El espacio vital donde la función tiene sentido. Como una planta que solo crece en ciertos terrenos, cada función existe dentro de parámetros específicos. La función $f(x)=1/x$, por ejemplo, vive en todos los números reales excepto en $x=0$, donde sufre una ruptura abrupta.
- ➔ **Comportamiento en los límites:** Cómo actúa la función cuando se aproxima a los bordes de su dominio. Algunas se disparan hacia el infinito, otras se acercan suavemente a un valor concreto, y algunas oscilan sin decidirse.
- ➔ **Tendencias de crecimiento:** La dirección y ritmo en que la figura o función se expande o contrae. Una parábola como $y = x^2$ se extiende hacia arriba indefinidamente, mientras que $y = -x^2$ hace lo contrario.

Límites y tendencias

Los límites son como una forma de predecir lo impredecible, imagina que estás caminando hacia una puerta, pero decides detenerte justo antes de cruzar, aunque nunca llegues a tocarla, podemos decir con seguridad que te “acercas” a ella. Así funciona el concepto de límite en matemáticas: permite describir hacia dónde se dirige una función, incluso si nunca llega a ese punto.

Piensa, por ejemplo, en la función $y = 1/x$. Si haces que x se acerque cada vez más a cero por la derecha (es decir, usando valores como 0.1, 0.01, 0.001...), notarás que y crece enormemente (10, 100, 1000...), tendiendo hacia el infinito. Pero si x se acerca a cero por la izquierda (con valores como -0.1, -0.01...), y decrece hacia menos infinito. Aquí, el límite no existe como un valor concreto, pero sí se puede describir su tendencia: la función “explota” hacia infinito o menos infinito según la dirección en que te acerques. En cambio, si analizas $y = (x^2 - 1)/(x - 1)$ cuando x tiende a 1, aunque la función no esté definida en ese punto (porque el denominador se anula), al simplificar la expresión obtenemos $y = x + 1$, lo que revela que el límite es 2. Esto muestra cómo los límites permiten “rellenar” huecos donde la función no está definida, descubriendo su comportamiento real.

Es hora de llevar esta idea más allá: ¿qué sucede cuando x no se acerca a un punto concreto, sino que crece o decrece sin parar? Esto es lo que llamamos tendencias al infinito, y permite entender el comportamiento de las funciones en escalas extremadamente grandes o pequeñas. Si se toma de nuevo $y = 1/x$: si x se hace cada vez más grande (100, 1000, 10000...), y se aproxima a cero, aunque nunca lo alcanza. Se dice entonces que la función tiene una asíntota horizontal en $y = 0$, una línea que actúa como un “imán” al que la curva se acerca indefinidamente.

Comportamiento asintótico

Los comportamientos asintóticos describen cómo una función o curva se aproxima a ciertos valores límite (llamados *asíntotas*) a medida que sus variables crecen o decrecen indefinidamente. Es como observar cómo un objeto distante parece fundirse con el horizonte: aunque nunca llegue a tocarlo, su trayectoria revela una tendencia clara.

Asíntotas verticales

Vamos a comenzar con las asíntotas verticales, que son como paredes matemáticas que la función no puede atravesar, piensa en la función más simple, $y = 1/x$, cuando x se acerca a cero, algo fascinante ocurre: si te aproximas por la derecha (con valores como 0.1, 0.01, 0.001...), los valores de "y" se disparan hacia el infinito positivo, mientras que si te acercas por la izquierda (con -0.1, -0.01...), y cae hacia el infinito negativo. La función nunca toca la línea $x = 0$, pero se acerca infinitamente a ella, esto es justamente una asíntota vertical: una línea vertical (en este caso, el eje Y) que actúa como una barrera que la función respeta, pero nunca cruza.

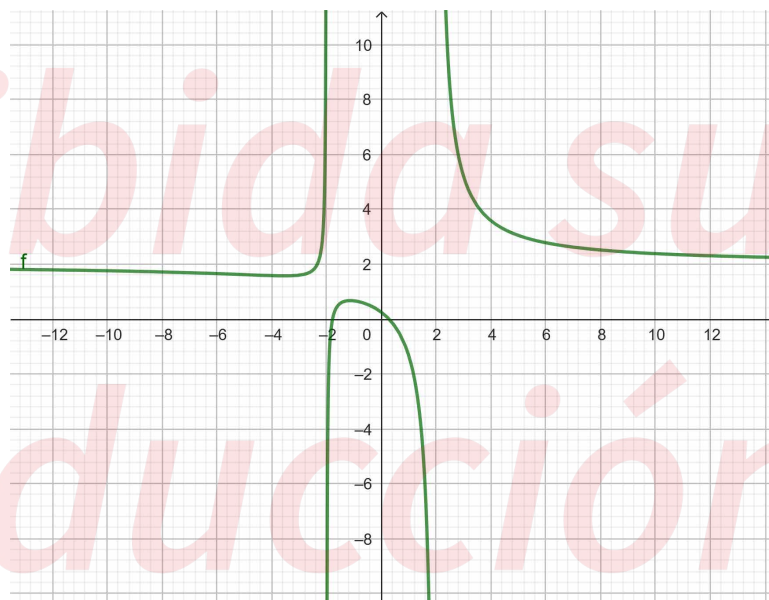
Asíntotas horizontales

Las asíntotas horizontales, que dicen hacia qué valor se estabiliza una función cuando x se hace enormemente grande o pequeño, siguiendo con el ejemplo $y = 1/x$, cuando x crece hacia infinito (imagina valores como 10, 100, 1000...), y se hace cada vez más pequeño, acercándose a cero sin nunca alcanzarlo, lo mismo ocurre si x tiende a menos infinito: la función se aproxima a $y = 0$ desde abajo, esta línea horizontal, $y = 0$, es la asíntota horizontal, y representa el valor límite que la función persigue pero nunca logra.

Asíntotas oblicuas

Las asíntotas oblicuas son menos comunes, pero igualmente importantes, a diferencia de las horizontales y verticales, estas líneas no son paralelas a los ejes, sino diagonales, y aparecen cuando una función crece de manera que, aunque se aleje infinitamente, lo hace siguiendo una trayectoria recta. Considera la función $y = (x^2 + 1)/x$, que puede simplificarse como $y = x + 1/x$, cuando "x" se hace muy grande, el término $1/x$ se vuelve insignificante, y la función se comporta esencialmente como $y = x$, sin embargo, ese pequeño término $1/x$ hace que la función nunca toque la línea $y = x$, aunque se acerque infinitamente a ella, esta línea diagonal es la asíntota oblicua, y su presencia revela que, incluso en su crecimiento desenfrenado, la función mantiene un patrón ordenado.

Para visualizar mejor estos conceptos, piensa en este ejemplo: la función $y = (2x^2 + 3x - 1)/(x^2 - 4)$. Aquí puedes encontrar asíntotas verticales en $x = 2$ y $x = -2$, donde el denominador se anula y la función "explota" hacia infinito. Además, cuando x tiende a infinito, los términos dominantes son $2x^2$ en el numerador y x^2 en el denominador, por lo que la función se aproxima a $y = 2$, creando una asíntota horizontal.



Pasos para realizar la gráfica de una función racional con comportamiento asintótico.

1. Se calcula los valores de las asíntotas verticales con ayuda del cálculo del dominio de la función.
2. Se calcula las asíntotas horizontales u oblicuas dependiendo de la comparación del grado de las expresiones del numerador y denominador.
3. Se trazan las asíntotas y se calculan los valores de la función en los puntos intermedios de las asíntotas verticales.

Analiza el siguiente ejemplo:

Realiza la gráfica de la siguiente función racional:

$$f(x) = \frac{x - 2}{x + 2}$$

Paso 1.

$$x + 2 = 0$$

$$x = -2$$

El dominio de la función es: $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$

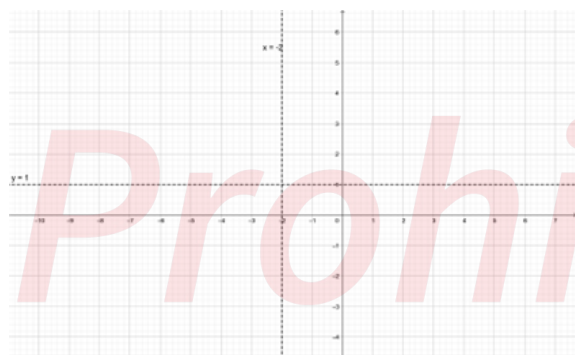
Paso 2.

Se calcula la asíntota vertical, como el grado de la expresión del numerador y denominador son iguales, entonces es:

$$y = 1/1$$

$$y = 1$$

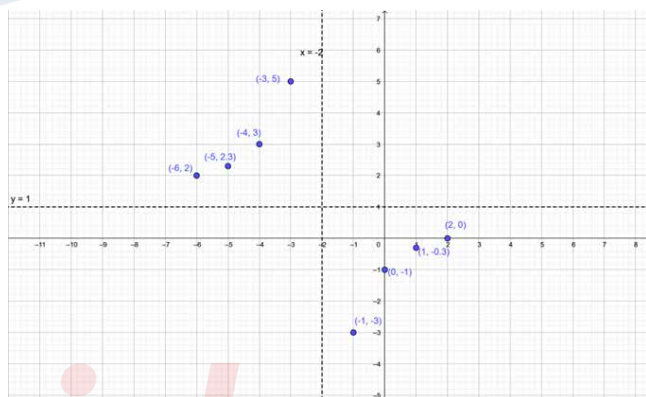
Se trazan las asíntotas y queda como:



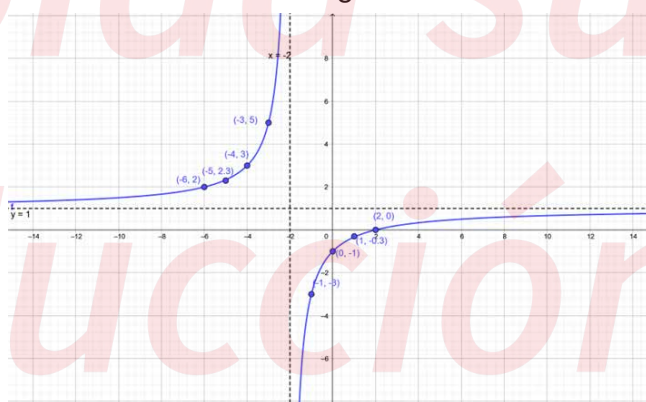
Posteriormente se dan valores al dominio antes y después de la asíntota vertical para obtener su rango respectivo:

x	-6	-5	-4	-3	-1	0	1	2
f(x)	2.0	2.3	3.0	5.0	-3.0	-1.0	-0.3	0.0

Se ubican los puntos de las coordenadas en el plano cartesiano.



Se traza la tendencia de la línea de los puntos y de esa manera se obtiene la gráfica.





Cierre

5 *Evaluar*



Práctica de aprendizaje



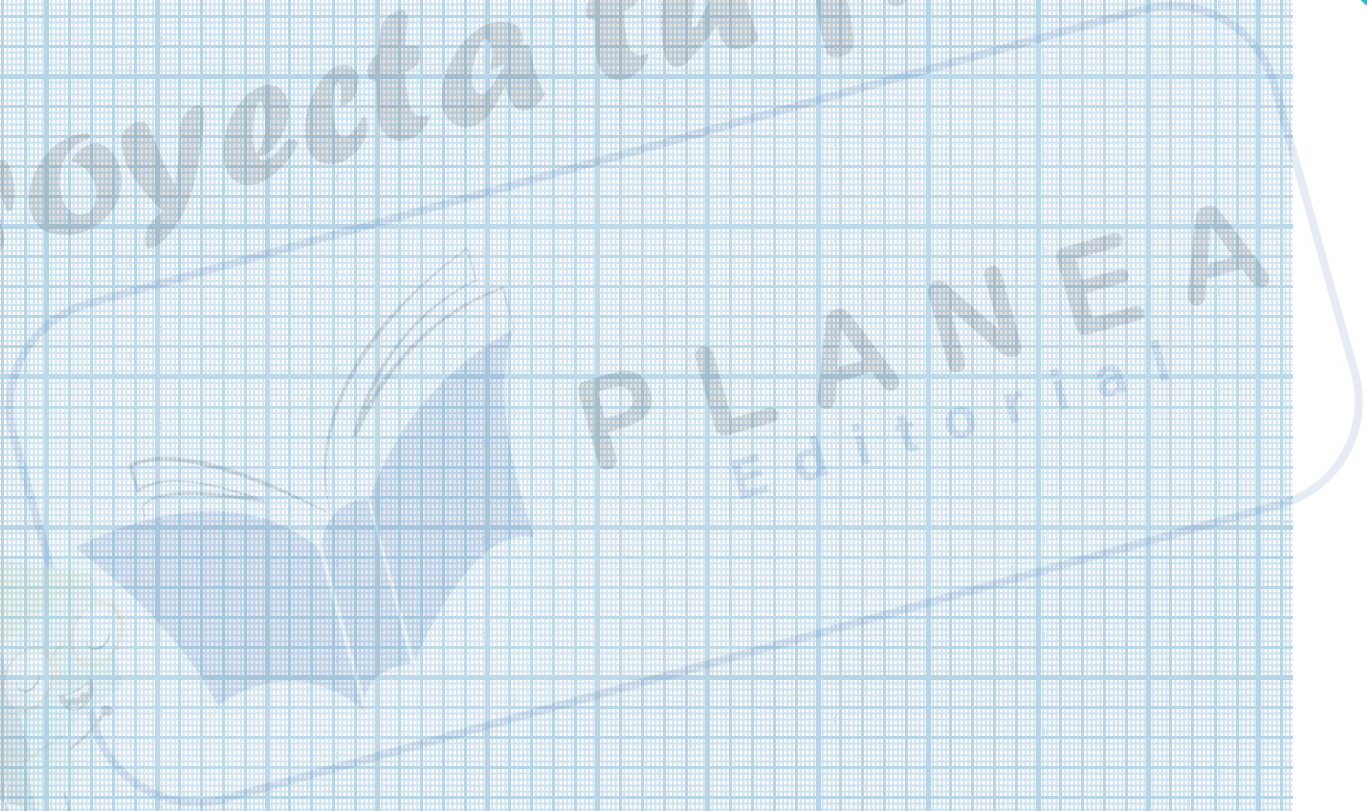
Realiza la gráfica de las siguientes funciones racionales con comportamiento asintótico.

1. $y = \frac{4x}{2x-2}$



2. $y = \frac{x^2-2}{x+1}$

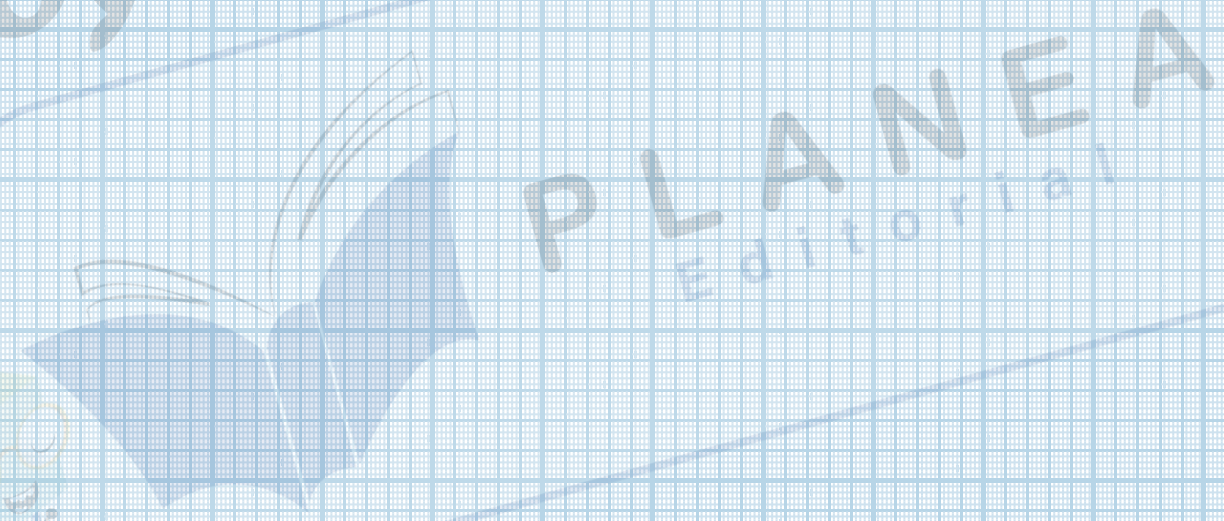
Proyecta tu futuro



Prohibida su
reproducción

3. $y = \frac{3x-2}{6x-12}$

Proyecta tu futuro



Prohibida su
reproducción



Estudio independiente

Responde cada una de las siguientes preguntas.

1. ¿Qué es un término en un polinomio y cómo identificas los términos en un polinomio de dos variables?

2. ¿Cómo identificas los componentes de un polinomio de dos variables y qué importancia tienen en su estructura general?

3. ¿Cómo interactúan los distintos componentes de un polinomio de dos variables para formar la expresión algebraica completa?

4. ¿Qué entiendes por simetría y extensión en una curva geométrica y cómo las identificas?

5. ¿Qué propiedades geométricas puedes identificar en una curva y cómo empiezas a deducir relaciones más complejas entre ellas?

6. ¿Cómo identificas y deduces todas las propiedades geométricas de una curva y estableces relaciones claras entre la expresión algebraica y la forma gráfica?

Prohibida su reproducción

7. ¿Cómo graficas una curva en el plano cartesiano y cuáles son los errores comunes que puedes encontrar?

8. ¿Cómo mejoras la precisión en la tráficación de curvas en el plano cartesiano y qué aspecto del conjunto solución consideras más desafiante?

9. ¿Cómo graficas curvas en el plano cartesiano con alta precisión y qué demuestra tu comprensión de las propiedades geométricas?

Autoevalúa los aprendizajes de la progresión con la siguiente rúbrica.

Criterio	Nivel Básico	Nivel Intermedio	Nivel Avanzado
Comprensión de Expresiones Algebraicas	Comprende parcialmente las expresiones algebraicas de polinomios de dos variables y necesita apoyo para identificar sus componentes.	Comprende adecuadamente las expresiones algebraicas y puede identificar la mayoría de los componentes de los polinomios de dos variables.	Comprende completamente las expresiones algebraicas y puede identificar todos los componentes y sus interacciones en los polinomios de dos variables.
Identificación de Propiedades Geométricas	Identifica algunas propiedades geométricas básicas (simetría, extensión) de las curvas, pero presenta dificultades para deducirlas correctamente.	Identifica correctamente varias propiedades geométricas de las curvas y empieza a deducir relaciones más complejas.	Identifica y deduce todas las propiedades geométricas (simetría, extensión, etc.) de las curvas y establece relaciones claras entre la expresión algebraica y la forma gráfica.
Precisión en la Graficación	Grafica las curvas en el plano cartesiano con precisión limitada, mostrando errores en la representación de los conjuntos solución.	Grafica las curvas en el plano cartesiano con una precisión aceptable, aunque aún puede mejorar en la representación de los conjuntos solución.	Grafica las curvas en el plano cartesiano con alta precisión, representando correctamente los conjuntos solución y demostrando una comprensión profunda de las propiedades geométricas.



Práctica socioemocional

Decisiones éticas por el bien común

“La ética es la práctica de reflexionar sobre lo que vamos a hacer y los motivos por los que vamos a hacerlo”.

Fernando Savater.

Constantemente se toman decisiones que involucran a los demás. Despertar tarde, por ejemplo, puede afectar a otras personas: tal vez te habías comprometido con tu madre a llevar un paquete al correo antes de acompañar a la escuela a tu hermano menor, quien ahora llegará retrasado, no saldrá a tiempo el envío y te perderás la primera clase. Ser responsable en tus decisiones también implica considerar los posibles efectos en otras personas y en tu entorno. **El reto** es identificar elementos del curso que te ayudarán a tomar decisiones de manera consciente, autónoma, responsable y ética ante diversas situaciones de tu vida, con el fin de promover el bienestar individual y colectivo.

a) Imagina que tienes la oportunidad de hacer un viaje a un lugar que siempre has deseado conocer. Te atrae mucho la idea de observar otras costumbres y probar cosas distintas, y ahora alguien que vive en ese lugar te ha invitado a pasar unos días en su casa, la siguiente semana. Te sientes tan feliz, que aceptas sin pensarlo. Cuando llegas a la escuela, se lo cuentas a tus amigos y aunque se alegran por ti, uno de ellos te recuerda que justo en esos días es la presentación de la obra de teatro que habían estado ensayando los últimos meses.

b) Piensa en dos posibles consecuencias de esta decisión para otras personas.

■ ¿A quiénes afectaría y de qué manera?

■ Después de reflexionar tu respuesta anterior, ¿qué decidirías?

Reafirmo y ordeno

La ética en la toma de decisiones es un elemento importante para hacerlo de manera responsable. Analizar las posibles consecuencias de tus elecciones en otras personas y en el entorno, sin olvidar tu propio bienestar, te ayudará a relacionarte con mayor armonía.

Escribe en un minuto qué te llevas de la lección





Lee el siguiente artículo de Mayte Azuela publicado en el portal El Universal Online.

Yucatán, la ruptura de la paz perpetua

Opinión de Maite Azuela

Yucatán es, por excelencia, sinónimo de seguridad. A lo largo de los años, ha mantenido los mejores indicadores del país en percepción de tranquilidad y confianza institucional. Su capital, Mérida, es promovida como un oasis de armonía en medio de un país sacudido por la violencia. Sin embargo, un caso reciente ha sembrado dudas sobre si esta paz es tan sólida como parece.

En 2022 estalló una disputa legal y mediática por la posesión de dos joyas turísticas: los hoteles “Mayaland” y “The Lodge at Chichén Itzá”, ubicados a escasos metros de una de las maravillas del mundo. El conflicto no solo involucró a empresarios locales y nacionales, sino que expuso fracturas profundas en los mecanismos de impartición de justicia, protección patrimonial y gobernanza en el estado.

La historia, bautizada en redes sociales como #CasoMayaland, no es solo un pleito por tierras o negocios: es una alerta. A través de testimonios, documentos legales y reportajes de investigación, se evidenció un sistema judicial que operó de manera opaca, favoreciendo intereses específicos y desprotegiendo a una parte históricamente ligada al desarrollo cultural y turístico de la región.

Uno de los elementos más alarmantes fue la rapidez con la que se ejecutaron ciertas resoluciones judiciales, contrastando con la lentitud y el desinterés mostrado ante otros casos ciudadanos. Esto ha generado un debate sobre la imparcialidad de los tribunales y sobre la capacidad de las autoridades para garantizar un estado de derecho parejo para todos.

La aparente calma de Yucatán comenzó a derrumbarse cuando actores políticos, económicos y judiciales se vieron señalados por su participación activa o su silencio cómplice. Lo que se presumía como un estado ejemplar en legalidad comenzó a parecerse, peligrosamente, a muchas otras entidades del país donde el poder se administra entre pocos y los derechos se negocian.

Durante el periodo en que se desarrollaron los hechos, el estado era gobernado por Mauricio Vila Dosal, del Partido Acción Nacional. Bajo su administración se promovió una imagen de estabilidad y paz institucional, pero la opacidad y permisividad judicial que rodearon este caso ocurrieron bajo su mandato. Hoy, con Joaquín Díaz Mena como gobernador, el silencio ha persistido: su administración ha optado por mantener el pacto de omisiones en torno al caso.

A esto se suma la dimensión simbólica del conflicto: la disputa ocurre a unos pasos de Chichén Itzá, ícono del México ancestral, emblema de la grandeza maya y patrimonio de la humanidad. Que el pleito involucre la apropiación de espacios tan significativos no solo afecta al turismo o la economía local: erosiona la confianza ciudadana en las instituciones y en la capacidad del estado para custodiar lo que le da sentido histórico y cultural.

Tampoco ha sido clara la postura del gobierno federal ante un conflicto que involucra patrimonio nacional. Si la Fiscalía General de la República, bajo control de Morena, decide no intervenir ni investigar, estará incurriendo en una complicidad silenciosa. La defensa del patrimonio y del estado de derecho no puede someterse a los intereses políticos del momento.

El caso Mayaland no ha terminado. Más bien, abrió una grieta. Y si algo enseñan las grietas es que hay que mirarlas con atención antes de que se conviertan en derrumbes. Yucatán sigue siendo un estado profundamente valioso, pero su perpetua paz, aquella que lo distinguía del resto, ya no puede darse por sentada.

Fuente: <https://www.msn.com/es-mx/noticias/mexico/yucat%C3%A1n-la-ruptura-de-la-paz-perpetua/ar-AA1EnSSz?ocid=BingNewsSerp>

Responde las siguientes preguntas.

1. ¿Por qué se considera a Yucatán un estado sinónimo de seguridad y tranquilidad?

2. ¿Cuál fue el impacto del conflicto por los hoteles “Mayaland” y “The Lodge at Chichén Itzá” en la percepción de la paz en Yucatán?

3. ¿Cómo afecta el caso Mayaland a la confianza ciudadana en las instituciones de Yucatán?

1ra Evaluación de unidad de aprendizaje

Subraya la respuesta correcta a cada planteamiento.

- Un objeto es lanzado desde el suelo con una velocidad inicial oblicua, sin considerar la resistencia del aire, y se registra su movimiento en el plano cartesiano. ¿Cuál es la forma habitual que presenta su trayectoria?
 - Línea recta
 - Parábola
 - Circunferencia
 - Elipse
- Utilizando software como Tracker o GeoGebra, se recoge el movimiento de una pelota lanzada. Para describir la trayectoria y determinar la relación entre la posición horizontal y vertical (X , Y), ¿cuál de las siguientes expresiones algebraicas es la más adecuada?
 - $y = ax + b$
 - $y = a/x + b$
 - $y = a \sin(x) + b$
 - $y = ax^2 + bx + c$
- Se grafica en GeoGebra la región definida por la inecuación $x^2 + y^2 \leq 16$, ¿Qué describe esta inecuación?
 - La circunferencia de radio 4 sin incluir el interior.
 - Una curva degenerada.
 - Un círculo cerrado (disco) con centro en $((0,0))$ y radio 4.
 - Dos semicírculos opuestos.
- Se analiza la ecuación $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 9$, ¿Qué propiedades geométricas se pueden deducir de ella?
 - Es una parábola con eje horizontal.
 - Es una elipse alargada en el eje (x) .
 - Es un círculo, de centro $((3,-2))$ y radio 3, simétrico respecto a cualquier recta que pase por su centro.
 - Es una hipérbola con dos ramas abiertas verticalmente.
- Considera el polinomio $f(x,y) = x^2 - 4y^2 = 0$. Al factorizar, se obtiene $(x-2y)(x+2y)=0$. ¿Cómo se interpreta este conjunto solución en el plano y qué propiedades admite?
 - Representa una hipérbola simétrica respecto a ambos ejes coordenados.
 - Representa únicamente una recta con pendiente 2.
 - Representa dos rectas perpendiculares con pendientes 2 y (-2) .
 - Representa la unión de dos rectas reales definidas por $(x - 2y = 0)$ y $(x + 2y = 0)$, que se intersecan en el origen y son simétricas respecto al origen.

Temas selectos de matemáticas

La Editorial Planea tiene como misión crear materiales didácticos de calidad, con los contenidos adecuados para impactar positivamente en la formación de los estudiantes, desarrollando sus conocimientos, habilidades y actitudes, que los transformen en jóvenes capaces de comprender su entorno e influir en él, aprender de manera autónoma a largo de su vida, ser consciente de sus destrezas para resolver problemas y aceptar retos que lo ayuden a alcanzar sus metas, ser sensibles al arte y sus expresiones, asimismo activar la participación ciudadana que reafirme su conciencia cívica y ética, fomentando una actitud respetuosa a la interculturalidad, diversidad de creencias, valores e ideas, asumiendo un pensamiento crítico que ayude al desarrollo sustentable de su comunidad.

El libro de **Temas selectos de matemáticas 2**, está desarrollado bajo los Principios de la Nueva Escuela Mexicana, teniendo como eje rector el Nuevo Modelo Educativo de la Educación Media Superior y el programa de estudio por progresiones para el **Bachillerato Tecnológico**, el cual propone los siguientes aprendizajes trayectoria de este

Recurso Sociocognitivo:

- Aplicar procedimientos algorítmicos e interpretar sus resultados para anticipar, encontrar y validar soluciones a problemas matemáticos, de áreas del conocimiento y de su vida personal.
- Observar, intuir, conjeturar y argumentar a favor o en contra de afirmaciones matemáticas tanto teóricas como de aplicación en áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos o recursos socioemocionales, para debatir y contrastar ideas con sus pares.
- Analizar situaciones y problemas, discerniendo las variables de interés para el estudio, así como la verificación requerida de las hipótesis para la aplicación de los objetos, métodos y conceptos matemáticos utilizados, con la finalidad de modelar fenómenos o resolver problemas.
- Describir, interpretar y comunicar con claridad ideas, situaciones y fenómenos propios de la matemática, de las ciencias naturales, experimentales, de la tecnología, de las ciencias sociales y de su entorno, empleando un lenguaje matemático riguroso..

En la Editorial Planea tenemos un compromiso por desarrollar materiales que cumplan con las expectativas de las comunidades educativas.

Titulos relacionados



ISO



771-159-1900



www.editorialplanea.com.mx