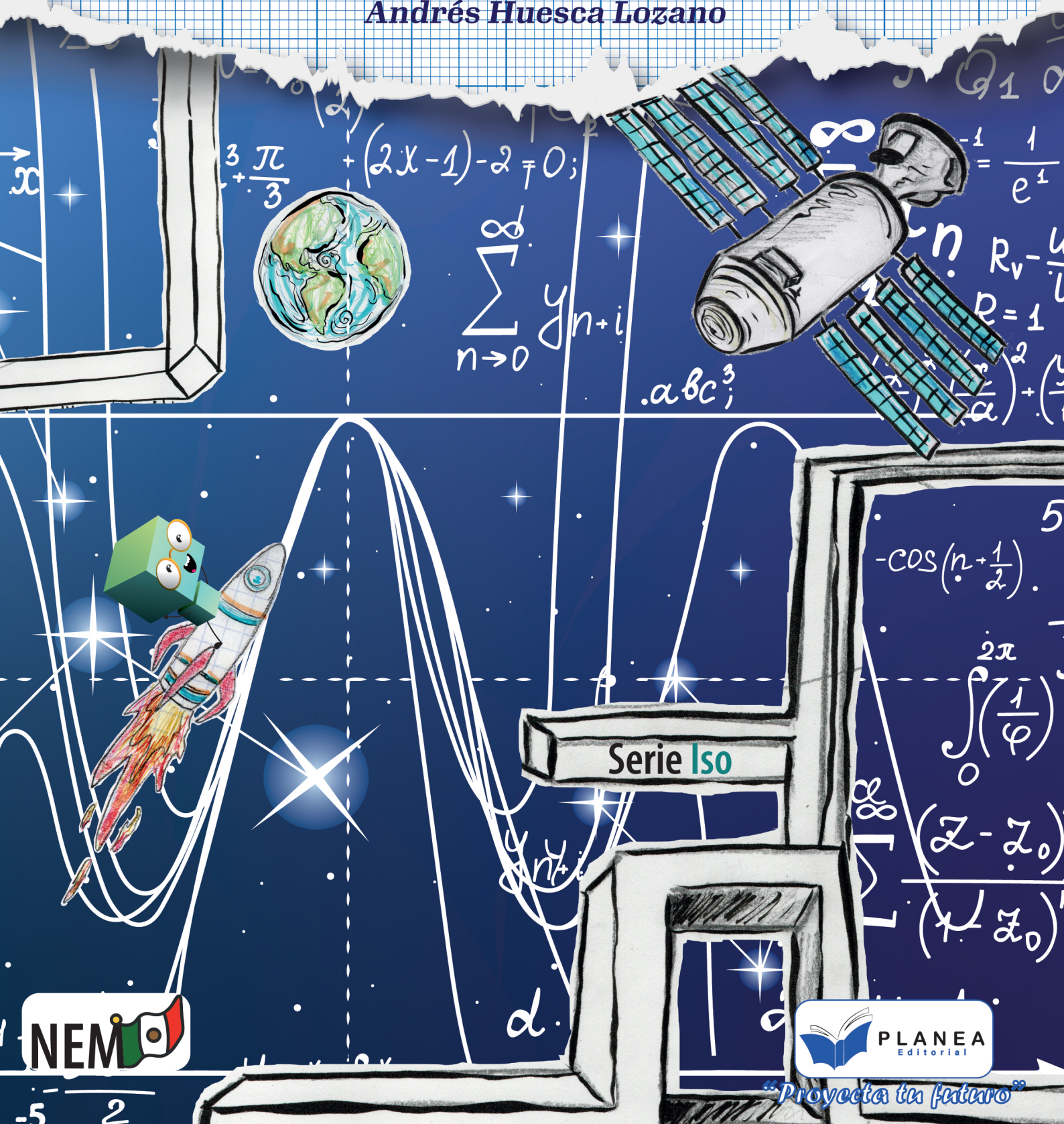


Pensamiento matemático 3

Andrés Huesca Lozano



“Proyecta tu futuro”



Pensamiento matemático 3

Primera Edición 2024

Copyright © Editorial Planea

ISBN: 978-607-69538-9-1

Impreso en México

Contacto: 771-655-6186

Correo electrónico:
informes@editorialplanea.com.mx

Editor en jefe: Cosme Lorenzo Rodríguez

Autor: Andrés Huesca Lozano

Correctora: Angélica M. Alvarado Carreón

Diseño: Nasbbi Irazú Portes Loeza

Imágenes: Adobe Stock

Se reservan todos los derechos. Está prohibida la reproducción, almacenamiento en sistemas de recuperación o transmisión de estas publicaciones, ya sea de forma electrónica, mecánica, mediante fotocopia, grabación u otros medios, sin el consentimiento previo del editor. Esto incluye su distribución en redes, almacenamiento electrónico o transmisión para fines de aprendizaje a distancia.

Aviso de exención de responsabilidad:

Los enlaces incluidos en este libro no son propiedad de Editorial Planea. Por lo tanto, no tenemos control sobre la información proporcionada por los sitios web en un momento determinado, y no podemos garantizar la exactitud de la información proporcionada por terceros (enlaces externos). Aunque se recopila cuidadosamente y se actualiza constantemente, no asumimos responsabilidad alguna por su exactitud, integridad o actualidad.

Los artículos atribuidos a los autores reflejan sus opiniones y a menos que se indique específicamente, no representan las opiniones del editor. Además, la reproducción de este libro o cualquier material de los sitios web incluidos en él no está autorizada, ya que dicho material puede estar sujeto a derechos de propiedad intelectual.

Los derechos pertenecen a sus respectivos propietarios, y Editorial Planea no se hace responsable de la información mostrada en los enlaces proporcionados.

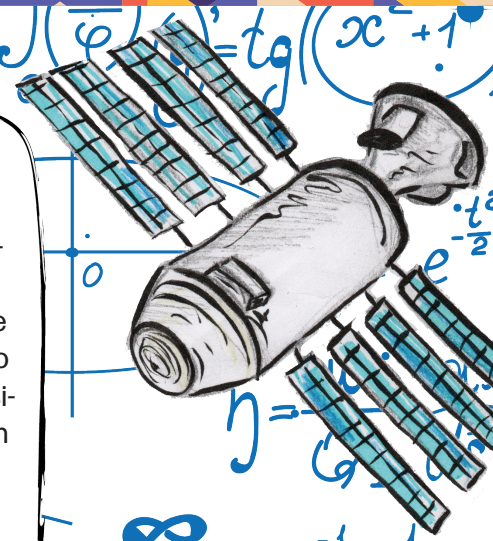
Presentación

En la Editorial Planea estamos comprometidos por ofrecer materiales didácticos de alta calidad, apegados al Nuevo Modelo Educativo de la Educación Media Superior, basados en la premisa de desarrollar en tu joven estudiante un aprendizaje situado en tu entorno, que te ayude cada día a enfrentar los problemas que se te presenten, que te permitan adaptarte a los cambios de la vida social, económica y política, al tiempo que te proporcionen un constante aprendizaje, que sea inclusivo, pluricultural, colaborativo y equitativo, es decir, apoyado en los principios de la Nueva Escuela Mexicana.

Este libro se encuentra apegado en su totalidad al programa de estudios basado en progresiones de aprendizaje del NME de la EMS, abordando las categorías y subcategorías para lograr los aprendizajes meta que propone el programa de Pensamiento Matemático III.

Estas progresiones, se encuentran organizadas en tres unidades de aprendizaje. La primera inicia con la narración de la historia del cálculo diferencial, aquí se explica cómo se fue desarrollando a lo largo del tiempo algunos conceptos clave tales como la idealización del infinito, la concepción de la recta secante y tangente, así como el concepto mismo de derivada. En la segunda unidad se desarrollan las progresiones referentes al concepto de derivada, se explican las reglas de derivación y se analiza gráficamente. Por último, en el tercer parcial se estudian aplicaciones de la derivada en la resolución de problemas y en diferentes tipos de funciones importantes dentro del cálculo diferencial.

El libro se ha diseñado para ti, con la finalidad desarrollar tus conocimientos y habilidades en el cálculo diferencial a través de la revisión de los conceptos básicos de esta rama tan importante dentro de las matemáticas.



$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$e^{-1} = \frac{1}{e^1}$$

$$R_v = \frac{U_m}{U}$$

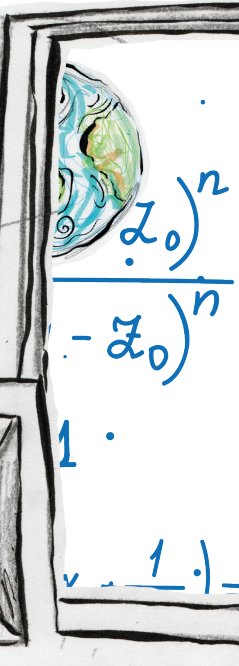
$$R = 1$$

$$\left(\frac{z}{c}\right)^2 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2$$

$$5^5$$

$$-\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{1}{v}$$



$$y = x \sum_{n \rightarrow 0}^{\infty} x y_{n+i}$$

$$R = -\frac{\Delta}{\Delta}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty}$$

$$\frac{-\Delta H}{\Delta t} \left(\frac{3}{3}\right)$$

$$N = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\alpha^3 + \frac{\pi}{3}$$

$$-(2x-1)^2 - 2 = 0$$

$$1 + \frac{1}{3x+7} - \frac{1}{2}$$

La Nueva Escuela Mexicana NEM

La Nueva Escuela Mexicana (NEM) parte de un diagnóstico donde la educación se entendía como tres ciclos sin conexión, la educación básica (preescolar, primaria y secundaria), la educación media superior y la educación superior, con base en este diagnóstico se construye una propuesta con una educación que debe ser entendida para toda la vida, bajo el concepto de aprender a aprender, la actualización continua, adaptación a los cambios y el aprendizaje permanente.

La NEM propone un plan de 23 años en los diferentes niveles educativos, los cuales estén interconectados entre sí, donde se potencialice la formación integral de las niñas, niños, adolescentes y jóvenes con el objetivo de promover el aprendizaje de excelencia, inclusivo, pluricultural, colaborativo y equitativo a lo largo de su formación.

Para alcanzar el bienestar y la prosperidad incluyente, la NEM se fundamenta en los siguientes principios:



Fomento de la identidad con México. El amor a la patria, el aprecio por su cultura, el conocimiento de su historia y el compromiso de los valores plasmados en la Constitución Política, son las acciones que forman este principio.



Responsabilidad ciudadana. El principio implica la aceptación de derechos y deberes personales y comunes, el respeto por los valores cívicos por parte de los estudiantes formados en la NEM es esencial para transmitir los valores de honestidad, respeto, justicia, solidaridad, reciprocidad, lealtad, libertad, equidad y gratitud.



Honestidad. Se destaca este valor dentro de la responsabilidad social de los estudiantes, el cual permite formar una sociedad con base en la confianza y el sustento de la verdad de todas las acciones para permitir una sana relación entre los ciudadanos.





Participación en la transformación de la sociedad.

La superación de cada persona por iniciativa propia es la base de este principio, el sentido social de la educación permite construir relaciones cercanas, solidarias y fraternas que superan las indiferencias y la apatía por transformar la sociedad.



Promoción de la cultura de la paz.

El objetivo de la agenda 2030 que promueve “Paz, justicia e instituciones sólidas”, tiene como fundamento promover sociedades pacíficas, inclusivas, que faciliten el desarrollo sostenible, el acceso a la justicia para todos y la construcción a todos los niveles de instituciones eficaces e inclusivas que rindan cuentas.



Promoción de la interculturalidad. El aprecio y la comprensión por la diversidad cultural y lingüística, así como, el diálogo y el intercambio cultural es una fuerza motriz para tener una vida intelectual, afectiva, moral y espiritual.



Respeto de la dignidad humana. Promover el respeto irrestricto a la dignidad y los derechos humanos de las personas, con base en la convicción de la igualdad de todos los individuos en derechos, trato y oportunidades.



Respeto por la naturaleza y cuidado del medio ambiente.

La conciencia ambiental favorece la protección y conservación del medio ambiente, la prevención de la contaminación y cambio climático comienza con la educación del desarrollo sostenible.



Conoce tu libro

Dentro del libro se encuentra desarrollado el Nuevo Modelo Educativo de la Educación Media Superior, el cual se basa en un programa de estudio por progresiones de aprendizaje, las cuales se desarrollan en tres momentos que son:



Apertura. En este primer momento se busca despertar el interés y la motivación del estudiante por el tema que se va a abordar.



Desarrollo. Se presenta el contenido y se realiza una explicación clara y detallada de los conceptos clave.



Cierre. En este último momento se busca consolidar los aprendizajes y hacer una evaluación del proceso.

También se encuentran las secciones:

Aprendizaje situado en contextos:



Evaluación diagnóstica. Se encuentra al inicio de cada unidad de aprendizaje, ayuda a identificar las fortalezas y debilidades con los temas que se van a abordar.



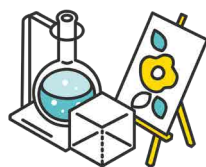
Escuela



Aula



Comunidad



Prácticas transversales. Donde se enlazan los aprendizajes de los recursos sociocognitivos con las disciplinas de las áreas de conocimiento.

Prácticas socioemocionales. El currículum ampliado se vincula con los recursos sociocognitivos, áreas de conocimiento por medio de los diferentes ámbitos de los recursos socioemocionales que están presentes en este tipo de actividades.



Prácticas de aprendizaje. La mejor manera de aplicar los conocimientos y habilidades aprendidas es a través de este tipo de prácticas, las cuales están numeradas, ubicadas en un contexto de aprendizaje y potencializando un principio de la NEM, como se muestra en el siguiente ejemplo:



Práctica de aprendizaje

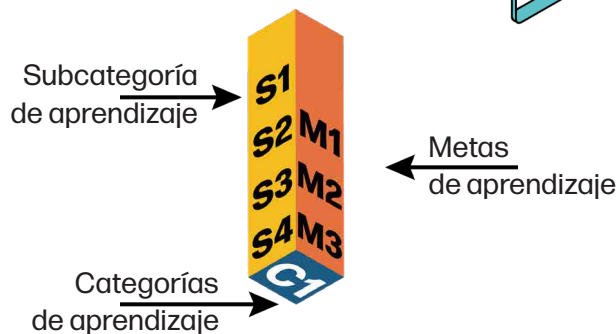


Lectura NEM. Es una actividad de comprensión lectora que aborda uno de los principios de la Nueva Escuela Mexicana.







Evaluación de la unidad de aprendizaje. Son reactivos que abordan los temas de cada unidad de aprendizaje.



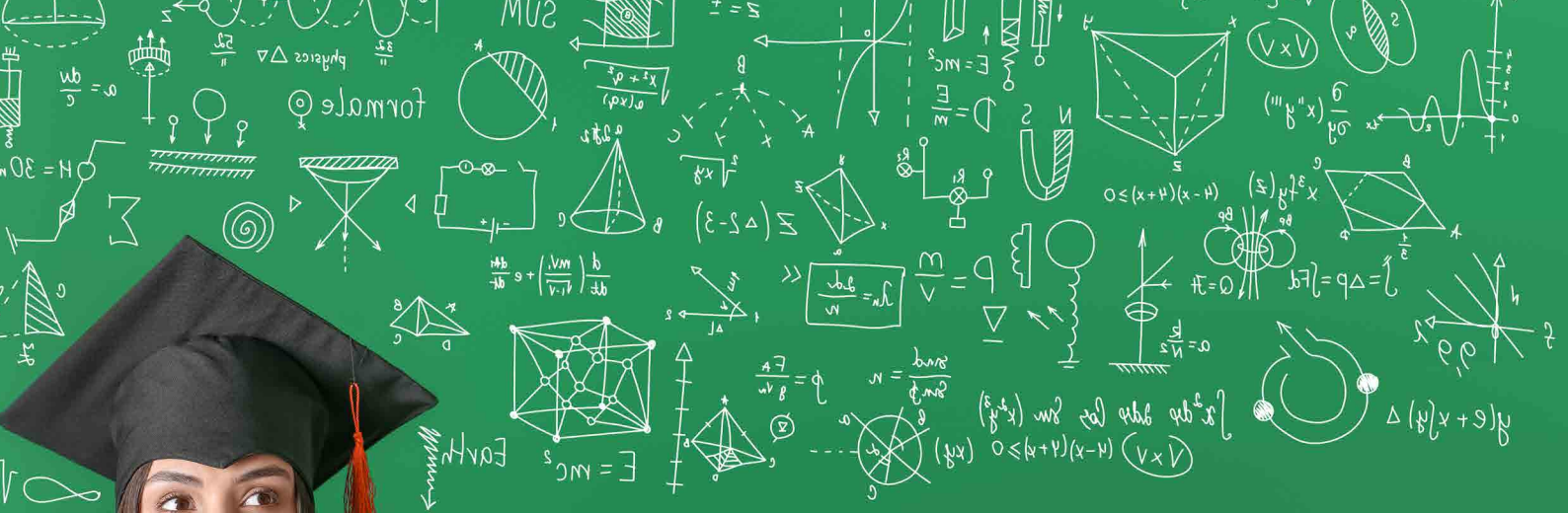
Categorías, subcategorías y metas de aprendizaje. Cada progresión tiene al inicio las categorías, subcategorías y metas de aprendizaje que aborda su contenido como se muestra a continuación:



Progresiones de aprendizaje

-  1. Genera intuición sobre conceptos como variación promedio, variación instantánea, procesos infinitos y movimiento a través de la revisión de las contribuciones que desde la filosofía y la matemática hicieron algunas y algunos personajes históricos en la construcción de ideas centrales para el origen del cálculo.
-  2. Analiza de manera intuitiva algunos de los problemas que dieron origen al cálculo diferencial, en particular el problema de determinar la recta tangente a una curva en un punto dado.
-  3. Revisa situaciones y fenómenos donde el cambio es parte central en su estudio, con la finalidad de modelarlos aplicando algunos conocimientos básicos de funciones reales de variable real y las operaciones básicas entre ellas.
-  4. Analiza la gráfica de funciones de variable real buscando simetrías, y revisa conceptos como continuidad, crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos relativos, concavidades, entre otros, resaltando la importancia de éstos en la modelación y el estudio matemático.
-  5. Conceptualiza el límite de una función de variable real como una herramienta matemática que permite comprender el comportamiento local de la gráfica de una función.
-  6. Identifica y contextualiza la continuidad de funciones utilizadas en la modelación de situaciones y fenómenos y hace un estudio, utilizando el concepto de límite, de las implicaciones de la continuidad de una función tanto dentro del desarrollo matemático mismo, como de sus aplicaciones en la modelación.





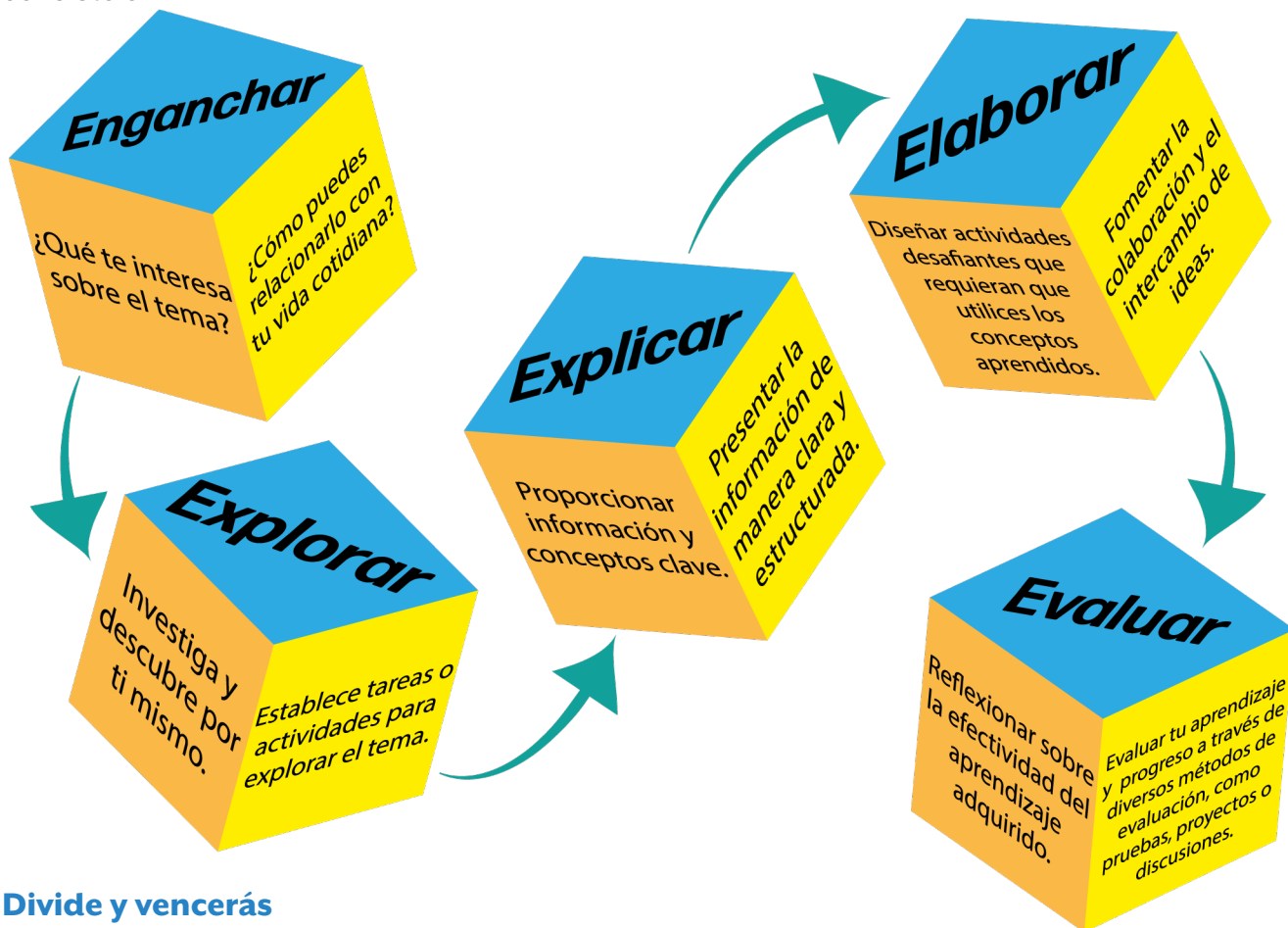
- 7.** Interpreta, a partir de integrar diferentes perspectivas y métodos, el concepto central del cálculo diferencial, “la derivada”, de forma intuitiva e intenta dar una definición formal, así como la búsqueda heurística para encontrar la derivada de la función constante, lineal y algunas funciones polinomiales.
- 8.** Encuentra de manera heurística algunas reglas de derivación como la regla de la suma, la regla del producto, la regla del cociente y la regla de la cadena y las aplica en algunos ejemplos.
- 9.** Selecciona una problemática en la que el cambio sea un factor fundamental en su estudio para aplicar el concepto de la derivada como razón de cambio instantánea.
- 10.** Explica y socializa el papel de la derivada para analizar una función (donde crece/decrece, máximo/mínimos locales, concavidades) y traza su gráfica.
- 11.** Resuelve problemas de su entorno o de otras áreas del conocimiento empleando funciones y aplicando la derivada (e.g. problemas de optimización), organiza su procedimiento y lo somete a debate.
- 12.** Examina la gráfica de funciones logarítmicas con diferentes bases y las gráficas de las funciones exponenciales para describirlas y realizar afirmaciones sobre el significado de que la función exponencial y logarítmicas de base “a” sean funciones inversas entre sí.
- 13.** Analiza y describe un fenómeno en el que la periodicidad sea un constituyente fundamental a través del estudio de propiedades básicas funciones trigonométricas.
- 14.** Selecciona una problemática, situación o fenómeno tanto real como ficticio para modelarlo utilizando funciones derivables.
- 15.** Considera y revisa algunas ideas subyacentes al teorema fundamental del cálculo.



Estrategias para trabajo colaborativo

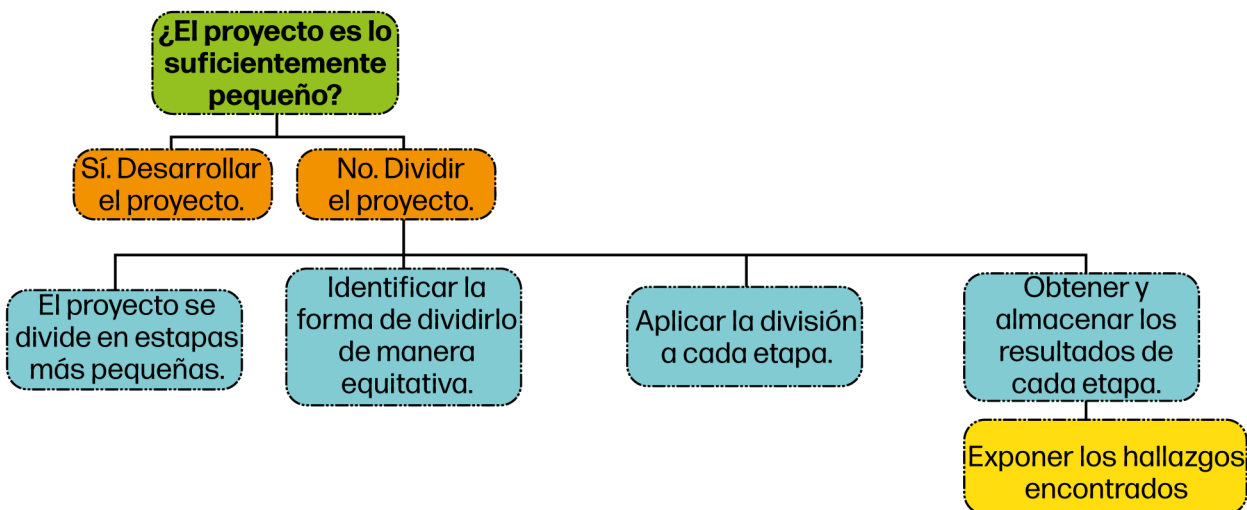
Estrategia 5E

Es una estrategia utilizada en educación para el trabajo colaborativo y diseño de proyectos, consiste en:



Divide y vencerás

Consiste en no ver un proyecto como una unidad, sino como una serie de etapas que pueden desarrollarse de manera individual para después integrar y exponer los hallazgos encontrados, a continuación se muestran los pasos a seguir.



Contenido

Unidad de aprendizaje 1. Antecedentes del cálculo diferencial

Filosofía y matemáticas en la construcción de conceptos clave
Fundamentos de cálculo diferencial
Aplicaciones de funciones de variable real
Conceptos clave y modelación matemática
Herramientas en el análisis de funciones

Unidad de aprendizaje 2. Cálculo diferencial y análisis gráfico

Implicaciones en la modelación matemática
La derivada desde múltiples perspectivas
Reglas de derivación
Análisis de situaciones dinámicas
Análisis y graficación de funciones

Unidad de aprendizaje 3. Aplicaciones del cálculo diferencial

Resolución de problemas con derivadas
Funciones logarítmicas y exponenciales
Análisis de fenómenos a través de funciones trigonométricas
Fenómenos con funciones derivables
Bases del teorema fundamental del cálculo

Bibliografía



Unidad de aprendizaje 1

Antecedentes del cálculo diferencial

Categorías de aprendizaje:

- **C1.** Procedural.
Subcategorías
 - **S1.1** Elementos variacionales.
- **C2.** Procesos de intuición y razonamiento.
Subcategorías
 - **S1.2** Capacidad para observar y conjeturar.
 - **S2.2** Pensamiento intuitivo.
 - **S3.2** Pensamiento formal.
- **C3.** Solución de problemas y modelación.
Subcategorías
 - **S1.3** Uso de modelos.
 - **S3.3** Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios.
- **C4.** Interacción y lenguaje matemático.
Subcategorías
 - **S1.4** Registro escrito, simbólico, algebraico e iconográfico.
 - **S2.4** Negociación de significados.

Metas de aprendizaje:

- **M1.1** Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.
- **M1.2** Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno.
- **M1.3** Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.
- **M1.4** Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno.
- **M2.1** Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieren explicación o interpretación.
- **M3.1** Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del Pensamiento Matemático, de Áreas de Conocimiento, Recursos Sociocognitivos, Recursos Socioemocionales y de su entorno.

Aprendizaje de trayectoria:

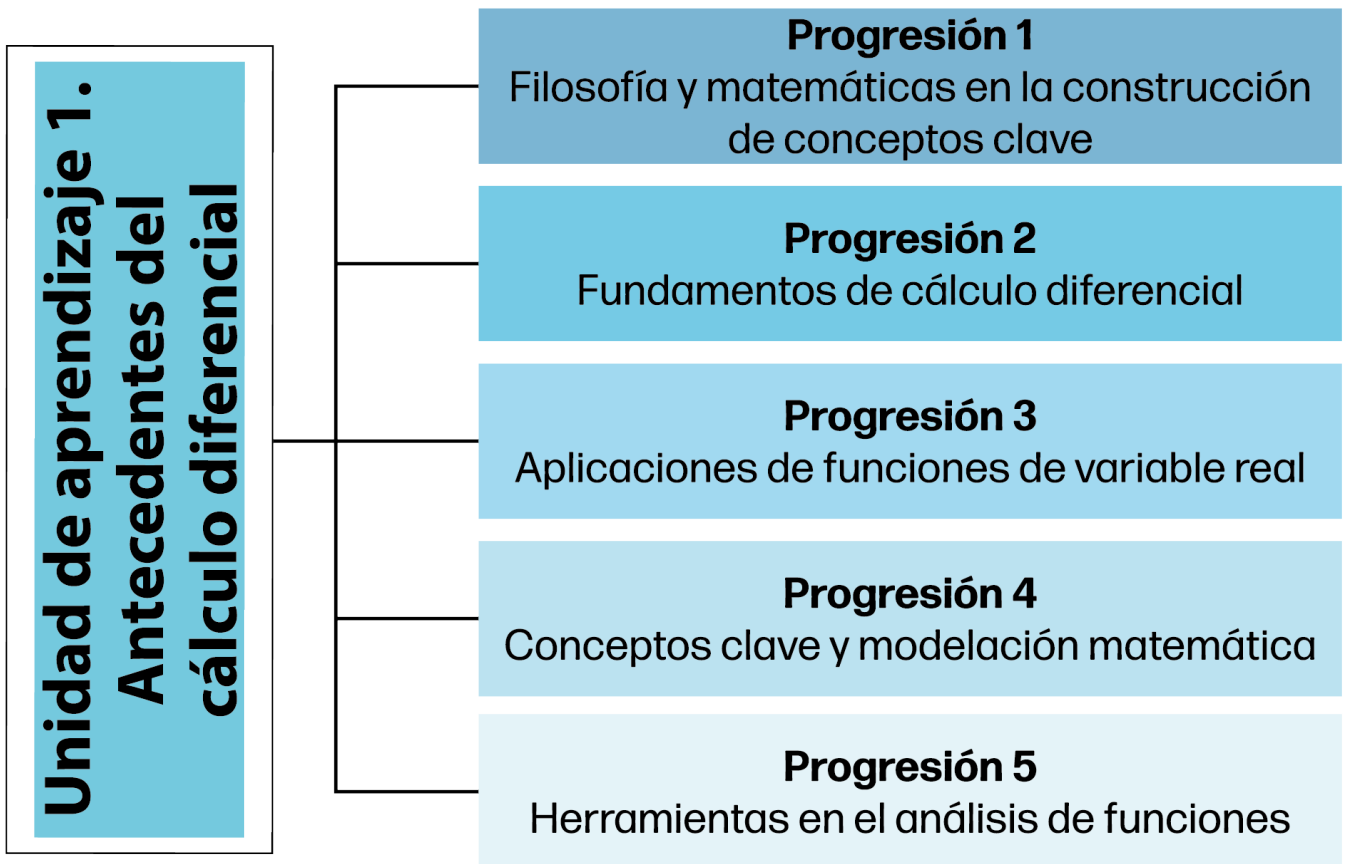
- Valora la aplicación de procedimientos automáticos y algorítmicos, así como la interpretación de sus resultados, para anticipar, encontrar y validar soluciones a problemas matemáticos, de áreas del conocimiento y de su vida personal.
- Adopta procesos de razonamiento matemático tanto intuitivos como formales tales como observar, intuir, conjeturar y argumentar, para relacionar información y obtener conclusiones de problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades, y de la vida cotidiana).
- Modela y propone soluciones a problemas tanto teóricos como de su entorno, empleando lenguaje y técnicas matemáticas.
- Explica el planteamiento de posibles soluciones a problemas y la descripción de situaciones en el contexto que les dio origen empleando lenguaje matemático y lo comunica a sus pares para analizar su pertinencia.

Progresiones de aprendizaje.

1. Genera intuición sobre conceptos como variación promedio, variación instantánea, procesos infinitos y movimiento a través de la revisión de las contribuciones que desde la filosofía y la matemática hicieron algunas y algunos personajes históricos en la construcción de ideas centrales para el origen del cálculo.
2. Analiza de manera intuitiva algunos de los problemas que dieron origen al cálculo diferencial, en particular el problema de determinar la recta tangente a una curva en un punto dado.
3. Revisa situaciones y fenómenos donde el cambio es parte central en su estudio, con la finalidad de modelarlos aplicando algunos conocimientos básicos de funciones reales de variable real y las operaciones básicas entre ellas.
4. Analiza la gráfica de funciones de variable real buscando simetrías, y revisa conceptos como continuidad, crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos relativos, concavidades, entre otros, resaltando la importancia de éstos en la modelación y el estudio matemático.
5. Conceptualiza el límite de una función de variable real como una herramienta matemática que permite comprender el comportamiento local de la gráfica de una función.

Presentación

En la presente unidad se explicará el proceso histórico sobre cómo filósofos y matemáticos sentaron las bases para el cálculo moderno. Examinaremos cómo estos matemáticos desarrollaron las ideas sobre variación, procesos infinitos y movimiento, las cuales influyeron en el desarrollo de conceptos clave del cálculo. La organización de temas específicos la puedes visualizar en el siguiente esquema.





Evaluación diagnóstica

Contesta las siguientes preguntas colocando la letra que corresponde al inciso correcto en el paréntesis de la derecha.

1.	El cálculo diferencial se ocupa de:	()
	a) a) Estudiar las cantidades muy pequeñas, como las magnitudes atómicas. b) b) Estudiar las fracciones y su uso para calcular triángulos y sus mediciones. c) c) Calcular la geometría de figuras planas y analizar sus propiedades y medidas. d) d) Analizar tasas de cambio instantáneo y cómo estas están relacionadas con las funciones.	
2.	La velocidad se define como:	()
	a) a) Un proceso en el que un objeto aumenta su movimiento con rapidez. b) b) El espacio recorrido por un móvil en una cierta cantidad de tiempo. c) c) El aumento de intensidad en el movimiento a partir del reposo absoluto. d) d) Las variantes en la intensidad del movimiento ya sea en reposo o en trayecto.	
3.	Desde la perspectiva de la física ¿cómo se define a la aceleración?	()
	a) a) Es una magnitud que representa el cambio de velocidad en un cierto tiempo. b) b) El empuje que gana un móvil al moverse en una pendiente. c) c) Es el tiempo que un móvil gana al aumentar la rapidez con que se mueve. d) d) Es el proceso de ganar velocidad conforme pasa el tiempo.	
4.	¿Cómo se define una recta tangente?	()
	a) a) Es la línea recta que atraviesan al círculo y lo divide en dos puntos. b) b) Es aquella recta que tiene un solo punto de contacto con una curva. c) c) Es una recta que pasa por el círculo, pero no por su centro. d) d) Es la recta que corta al círculo por el centro y lo divide en dos partes exactas.	
5.	¿Cómo se define a una recta secante?	()
	a) a) Es la recta que corta perpendicularmente a otra recta en un punto dado. b) b) Es aquella que pasa por una curva en un solo punto, partiendo la curva en dos. c) c) Es una recta que corta a la mitad al radio, por ello, no pasa por el centro. d) d) Es la línea recta que intersecta en dos puntos a una circunferencia o una curva.	

6.	<p>¿Qué es la pendiente de una recta?</p> <p>a) a) Es la distancia entre dos puntos en la recta. b) b) Es la inclinación de la recta y se expresa como la diferencia entre las coordenadas y dividida por la diferencia entre las abscisas. c) c) Es el punto en donde la recta corta al eje x. d) d) Es el punto en donde la recta corta al eje y.</p>	()
7.	<p>¿Qué es una función?</p> <p>a) a) Es un conjunto de puntos en un plano cartesiano los cuales no guardan ninguna relación entre sí. b) b) Es una relación entre dos conjuntos donde a cada elemento del primer conjunto le corresponde exactamente uno del segundo conjunto. c) c) Es una ecuación con dos incógnitas que no poseen ninguna clase de relación. d) d) Es un conjunto de números ordenados de mayor a menor.</p>	()
8.	<p>¿Qué es una función real?</p> <p>a) a) Es una función que solo tiene raíces reales. b) b) Es una función que siempre es positiva. c) c) Es una función que opera solo con números reales. d) d) Es una función que se grafica en el plano complejo.</p>	()
9.	<p>¿Qué es el rango y dominio de una función?</p> <p>a) a) El dominio son los valores posibles de "x" y el rango son los valores posibles de "y". b) b) El dominio son los valores posibles de "y", y el rango son los valores posibles de "x". c) c) El dominio son los valores posibles de la función y el rango son los valores posibles de "x". d) d) El dominio son los valores posibles de "x" y el rango son los valores posibles de "y".</p>	()
10.	<p>¿Qué significa que una función sea continua?</p> <p>a) a) Que no tenga discontinuidades en un punto. b) b) Que su gráfica sea una línea recta. c) c) Que su gráfica esté compuesta por varios segmentos. d) d) Que su dominio sea finito.</p>	()
11.	<p>¿Qué es un valor máximo y mínimo de una función?</p> <p>a) a) Son los valores de "x" que hacen que la función sea positiva o negativa. b) b) Son los valores de la variable "y" más altos y más bajos que la función alcanza, respectivamente. c) c) Son los valores de "x" en los que la función corta al eje "x". d) d) Son los valores de "x" en los que la función corta al eje "y".</p>	()

Filosofía y matemáticas en la construcción de conceptos clave



Apertura

En esta progresión inicial, se realizará un breve recorrido sobre el concepto de “infinito” en la historia de las matemáticas, con algunas aclaraciones cuando nos refiramos a cuestiones relacionadas con la filosofía y física.

Inicialmente el concepto de infinito en la matemática proviene de tres fuentes:

- a) La fuente geométrica.
- b) El conteo perpetuo de los números tanto en sentido negativo como positivo.
- c) El razonamiento deductivo del movimiento.

Estas fuentes provienen del mundo griego clásico, en donde se destaca uno de los primeros pensadores y matemáticos griegos en tratar el tema de lo inconmensurable, el matemático Eudoxo, quien nació en la ciudad de Knido entre los años (), los estudios de Eudoxo se centraron en tratar el tema de lo que no se puede medir (lo inconmensurable) respecto al cálculo de áreas y volúmenes, también fue de los primeros matemáticos en estudiar la cuantificación infinita de números. En este aspecto introdujo la idea de magnitud continua dentro del conteo de números. Para él entre cada número existía un segmento infinito de otros números, de tal modo que no se producía simplemente un salto desde el cuatro al cinco, pues como ahora lo sabemos entre estas cifras tenemos números como el 4.1, 4.2, 4.3, pero también 4.11, 4.12, 4.13, y así. Esta idea fue novedosa para esa época pues mostró que de una manera continua en el campo de las matemáticas el conteo de números puede ser infinito.



Práctica de aprendizaje



Contesta las siguientes preguntas seleccionando la respuesta correcta en la línea de la derecha:

1.	¿Qué números se encuentran entre 5 y 6?	()
	a) 5.1, 5 ½, 5.999 b) 6, 5, 5.45 c) 5.25, 0.55, 5 ¼ d) 5.3, 5.4, 050.5	
2.	¿Qué números se encuentran entre 8 y 9?	()
	a) 8.3, 8.36, 9.001 b) 7, 7.001, 7.44 c) 8.48, 0.855, 8 ¼ d) 8.4, 8.58, 8 ½	
3.	¿Qué números se encuentran entre -1 y -2?	()
	a) -0.3, -1.3, -2.01 b) -1.1, -0.001, -1.94 c) -1.8, 1.52, -1¼ d) -1.9, -1.58, -2 ½	

La mayor contribución de Eudoxo a la matemática fue lo que se conoce como el Método de exhaustión también conocido como método por agotamiento. Dicho método es un procedimiento geométrico que se basa en encontrar el perímetro o el área de figuras curvilíneas mediante el cálculo de figuras inscritas bajo el área de la curva, de las cuales si podemos conocer su área.

Si se desea llevar a cabo el proceso de exhaustión para calcular áreas de figuras curvas, es necesario que estas se dividan en polígonos más pequeños, en donde usualmente la división de estas curvas suele realizarse mediante triángulos, cuyas áreas individuales pueden ser calculadas fácilmente.

Para dividir una curva sobre la cual se desea calcular el área, a esta se la divide en un número finito de triángulos, utilizando métodos como la triangulación o la subdivisión uniforme. Luego, se calcula el área de cada triángulo utilizando la fórmula básica del área del triángulo, en donde se emplean la base y la altura de cada triángulo. Posteriormente, se suma el área de cada uno de los triángulos obtenidos, lo que proporciona una aproximación de la superficie total de la figura curva.

A medida que se aumenta el número de triángulos utilizados en la aproximación, es decir, cuando se reduce el tamaño de cada triángulo, la precisión del cálculo del área mejora. Esto se debe a que los triángulos más pequeños se asemejan mejor a la forma de la figura curva, reduciendo así el error de aproximación. Finalmente, mediante el proceso de límite, donde el número de triángulos tiende a infinito y sus áreas a cero, se obtiene el valor exacto del área de la figura curva, lo cual como se verá más adelante, es lo que constituye uno de los fundamentos del cálculo integral.

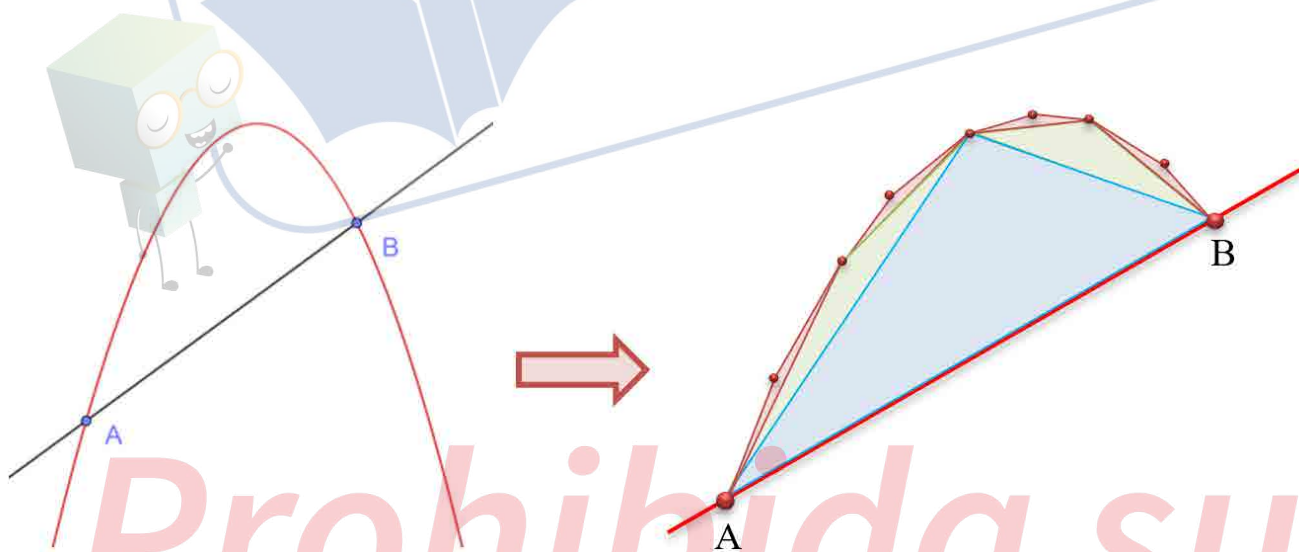
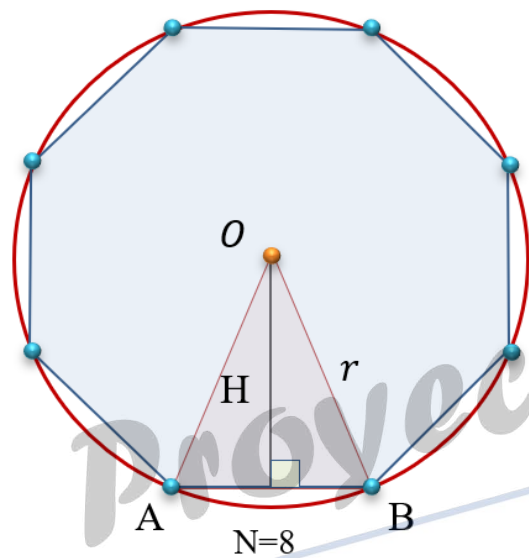


Figura 1. Método de exhaustión aplicado a una curva.

Por ejemplo, si se necesitara encontrar el área entre la curva y la recta que corta entre los puntos A y B , se puede encontrar mediante el Método de exhaustión, en donde se emplean diferentes figuras como triángulos o rectángulos para aproximarse al área que se desea conocer.

El método de exhaustión mejor ideado, fue realizado por Arquímedes (Siracusa, 287 a.C.-212 a.C.). Arquímedes propuso que en lugar de emplear muchas figuras inscritas para al final sumar sus áreas simplemente se podrían inscribir polígonos regulares en una circunferencia, de tal modo que mientras más lados tengan dichos polígonos más se acercará el perímetro de la longitud de la circunferencia y también a su área.



Por ejemplo, si se inscribe un octágono dentro de un círculo, el polígono constará de N triángulos como OAB , donde O es el centro del círculo, y el área de cada uno de esos triángulos será $1/2$ de su base AB multiplicada por su altura H . El área total del polígono por lo tanto será N veces el área del triángulo, expresado matemáticamente como:

$$\text{Área del polígono} = 1/2 \times (AB) \times H \times N.$$

En otras palabras, para calcular una aproximación al área del círculo O , mediante el cálculo del área de un octágono inscrito, se debe multiplicarse 8 veces el área del triángulo AOB , dado que son 8 triángulos similares que forman el octágono.

Para comprender como funciona el método por agotamiento propuesto por Arquímedes, lo aplicaremos en el cálculo del área de un círculo. Para ello, inscribiremos distintos polígonos regulares dentro del círculo. Veremos lo que sucede al ir agregando progresivamente figuras con cada vez mayor número de lados iguales. (Ver figura 2).

De esta forma si se desea calcular el área del círculo, podremos decir que en la medida que la figura geométrica regular tenga más lados estará más cerca del cálculo del área del círculo. Iniciamos con un hexágono. Como se puede apreciar, hay una gran parte del círculo que no se está considerando. Luego, probamos con un octágono y el área no calculada del círculo es menor; seguimos el mismo procedimiento hasta que llegamos a un dodecágono, que es un polígono regular de 12 lados iguales.

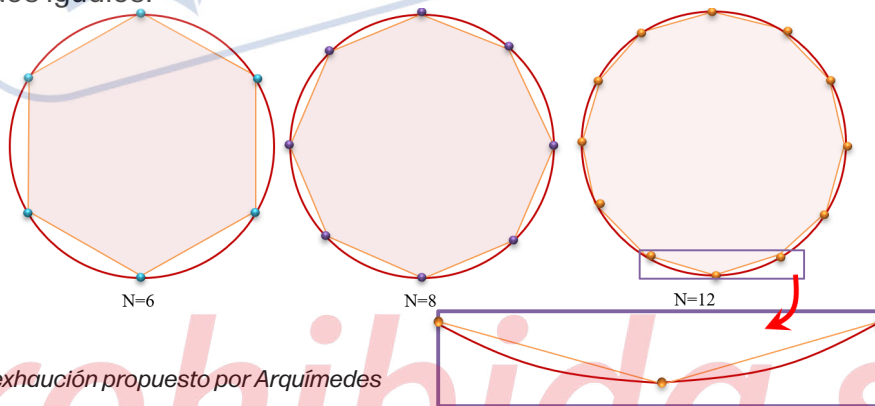


Figura 3. Método de exhaución propuesto por Arquímedes

Al observar cómo se reduce el área entre el área del círculo y la del polígono regular inscrito podremos asegurar que al tener más lados el polígono, su superficie se va asemejando más a la del círculo, (ver figura). Sin embargo, podemos hacer el cálculo con 16, 20, 24 o 32 lados y cada vez nos acercaremos más, pero nunca llegaremos. Por eso se dice que la aplicación del Método de exhaución o Método por Agotamiento nos lleva a la "idea del infinito", al comprender como el área del círculo puede verse como un límite al que se desea alcanzar mediante infinitas aproximaciones del área del polígono inscrito cuando este va incrementando su número de lados infinitamente ($N \rightarrow \infty$), es decir, que el número de lados N de un polígono tiende al infinito.

Dentro de las matemáticas, el concepto de infinito muchas veces puede representarse tanto desde la perspectiva del conteo de números como también geoméricamente. Un ejemplo de ello son las series geométricas infinitas las cuales representan un conteo que se puede visualizar geoméricamente mediante un área.

Por ejemplo, si tomamos en cuenta una serie infinita, como:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \dots = 1$$

Podemos observar que esta es una suma de un número de términos infinitos que continuará para siempre buscando aproximarse tanto como se pueda a 1, en donde el 1 representa el límite al cual se desea llegar, por lo tanto, tiene sentido definir la suma infinita como exactamente 1.

Para representar la regla que nos dice que cada término subsecuente es la mitad del anterior, podemos tomar un cuadrado unitario que se fragmenta sucesivamente conforme los términos de la serie, de esta forma podemos ver como la figura geométrica se divide repetidamente iniciando en este ejemplo en $1/2$, después en $1/4$, continuamente en un $1/8$, posteriormente en un $1/16$, y así sucesivamente hasta el infinito.

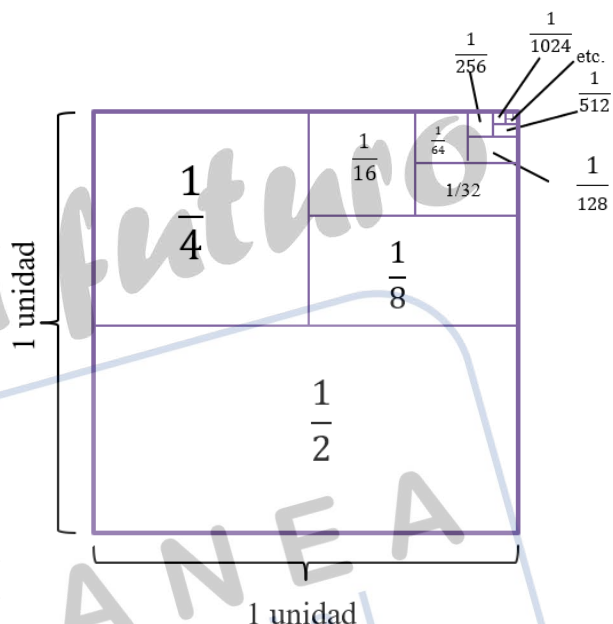


Figura 4. Representación geométrica de la serie geométrica decreciente $S_{\infty} = \frac{a}{(1-r)}$, en donde " S_{∞} " es una suma infinita, " a " es el primer término con valor igual a 1 y " r " es la razón común igual a $1/2$.



Práctica de aprendizaje



1. Completa las siguientes series numéricas que tienden al infinito colocando los siguientes 3 números subsecuentes:

a) $\frac{1}{5} \quad \frac{1}{10} \quad \frac{1}{20} \quad \frac{1}{40}$

b) $\frac{4}{8} \quad \frac{4}{16} \quad \frac{4}{32} \quad \frac{4}{64}$

Prohibida su reproducción

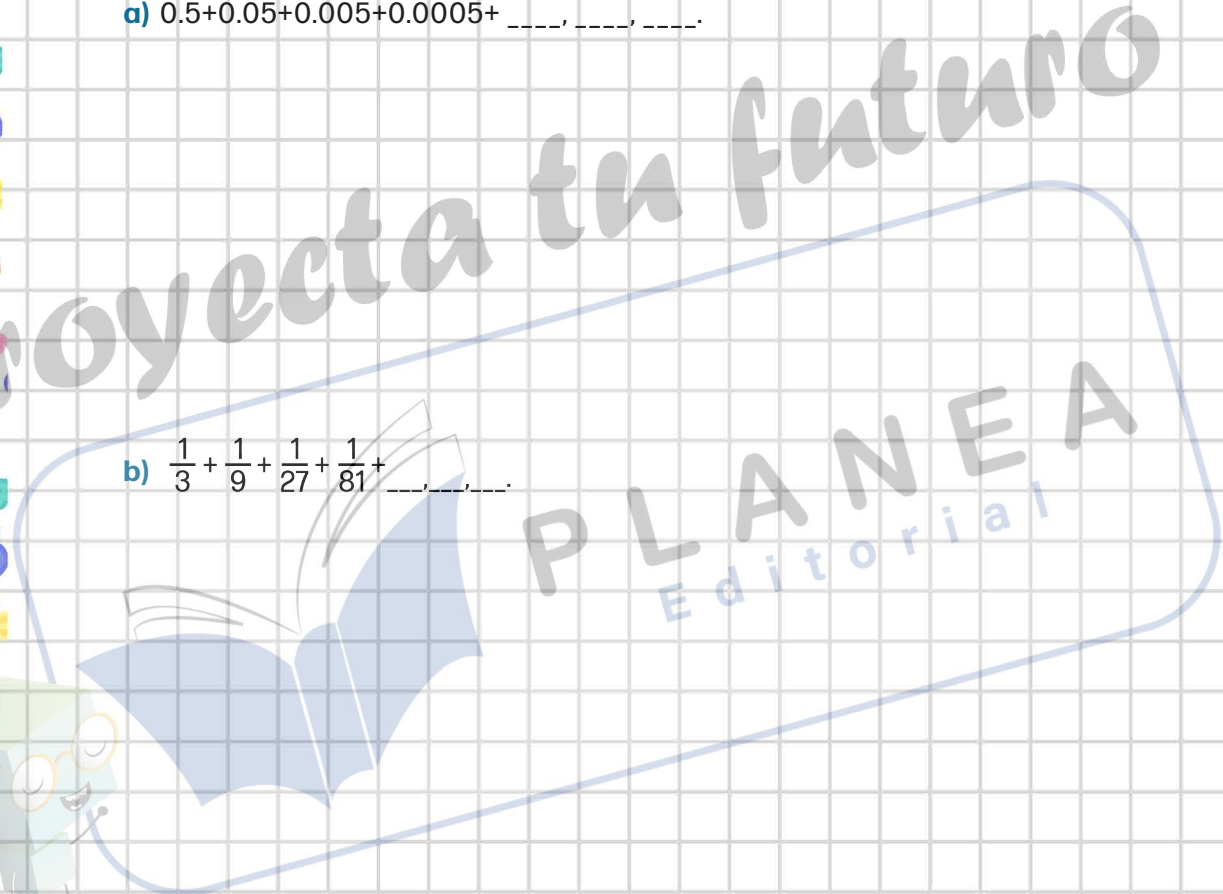


2. Escribe que regla siguen las siguientes series numéricas descendentes, posteriormente en el cuadro de abajo escribe lo que tienen de común dichas series.

a) $0.5+0.05+0.005+0.0005+ \dots, \dots, \dots$

b) $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots$

3. En tu cuaderno y con ayuda de un compás, traza una circunferencia que mida de radio 5 cm, posteriormente empleando diferentes colores realiza el proceso de agotamiento realizado por Arquímedes, comienza inscribiendo un hexágono regular y termina con un dodecágono regular.



Prohibida su
reproducción

El estudio del movimiento, la tercera conceptualización del infinito.

Las primeras ideas que se conocen para conceptualizar a la velocidad y al movimiento también surgieron del pensamiento lógico de la filosofía de los antiguos griegos.

Estos filósofos no intentaron encontrar formulaciones o planteamientos matemáticos. Dado que eran los inicios de la reflexión humana sobre el tema, sus conceptos físicos y matemáticos eran muy básicos, pero si propusieron problemas en forma de paradojas o acertijos, los cuales únicamente tenían solución mediante el razonamiento lógico. Ellos no llegaron a hacer planteamientos matemáticos ni **físicos**.

Una de las primeras paradojas que se plantearon fue propuesta por el filósofo griego Zenón de Elea (hacia 500 a.C.), para ejemplificar su enigma matemático emplea a un personaje muy conocido en el mundo griego clásico, el héroe Aquiles y a una tortuga.

En la paradoja de Zenón, conocida como la paradoja de Aquiles y la tortuga, se plantea lo siguiente:

«En una carrera, el corredor más rápido nunca puede superar al más lento, ya que el perseguidor debe llegar primero al punto donde comenzó el perseguido, por lo tanto, el más lento siempre tendrá una ventaja.»

La paradoja de Zenón explora tanto el concepto de intervalo entre dos objetos (teniendo un punto de partida y un punto final), así como la idea del infinito en las matemáticas.

El argumento del filósofo Zenón nos dice que en una carrera desigual uno contra uno, entre Aquiles y una tortuga, si la tortuga parte con una ligera ventaja, aun siendo Aquiles mucho más rápido este nunca la alcanzará. Este supuesto lo podremos observar en el siguiente gráfico, en donde la distancia entre los puntos y es igual a 10 metros.

Como se puede apreciar en este ejemplo, en el tiempo que tarda Aquiles en ir desde el punto de partida A_0 hasta el punto $T_0=A_1$, la tortuga ya se habrá movido a una posición T_1 y sucesivamente cuando Aquiles llega a la posición $T_1=A_2$, la tortuga habrá alcanzado una nueva posición en T_2 . Lo mismo vuelve a ocurrir cuando Aquiles llega a la posición T_3, T_4, T_5, \dots la tortuga siempre tendrá una posición más de ventaja sobre Aquiles y así hasta el infinito, por lo que Aquiles nunca alcanzará a la tortuga.

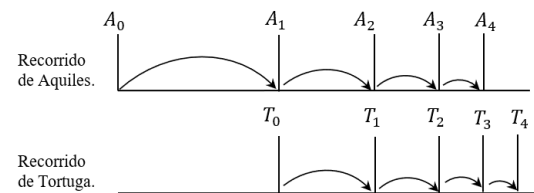


Figura 5. Representación de la paradoja de Aquiles y la tortuga.

Esta idea sobre la distancia infinita entre Aquiles y tortuga plantea que habría que recorrer una infinidad de tramos cada vez más pequeños, pero nunca nulos en donde Aquiles acortaría la distancia pero sin alcanzar nunca a la tortuga.

Si se idealiza matemáticamente esta paradoja podemos proponer que Aquiles recorre 10 metros por segundo y la tortuga solo uno. Entonces Aquiles tardará 1 segundo en llegar hasta la posición $T_0=A_1$, mientras tanto en ese tiempo en donde Aquiles recorre la distancia hasta T_0 la tortuga correrá un metro en un segundo, es decir, recorrerá la distancia desde T_0-T_1 . Luego Aquiles tarda 0.1 segundos en recorrer el metro que existe entre T_0 y T_1 , mientras que nuevamente la tortuga recorre 1 metro desde T_1 para llegar a T_2 .

Otra aportación realizada por el filósofo Zenón de Elea relacionada con el movimiento es "La Paradoja de la velocidad instantánea", la cual, se centra en la noción de que para llegar de un punto A hacia un punto B, primero uno debe llegar hasta la mitad del camino, y luego a la mitad de la mitad, y así sucesivamente. Conforme a la teoría de Zenón, esto implica que hay una infinidad de pasos que se deben completar antes de llegar al destino final, y por lo tanto, el movimiento debería ser imposible.

Glosario

Velocidad instantánea y movimiento

La velocidad instantánea es un concepto importante al hablar de movimiento, este concepto lo empleamos cuando nos interesa saber cómo cambia la posición de un objeto en función del tiempo.

La evolución del pensamiento matemático

Dentro del concepto matemático de infinito en el conteo de números, el encargado de poner un orden lógico dentro de esta idea fue Aristóteles (384 a. C- 322 a. C), el filósofo griego hace una división dentro del concepto de infinito, dentro de la primera división el idealiza al infinito como un conjunto continuo, (por ejemplo, “el conjunto de todos los números reales \mathbb{R} ”), el cual comprende un universo de valores.

Así también distingue al infinito como algo que tiene un potencial indeterminado que siempre puede incrementarse, que no tiene límite ni término, pero que no puede pensarse en su totalidad: en este sentido se puede pensar en un proceso infinito, (∞).

Para Aristóteles el infinito únicamente debe de entenderse como algo conceptual y no real, pues este no tiene medición, solamente a través de lo conceptual existe la posibilidad de que el infinito pueda crecer tanto como se desee.

Aristóteles consideraba que el concepto de infinito era manipulable por los matemáticos según sus especulaciones, en su libro “Física” afirmó: “una línea recta finita se puede extender a voluntad, tanto como se quiera”. Con ello, nos indica que cuando se habla de un crecimiento “ilimitado” o “indefinido” exclusivamente el concepto de infinito a considerarse debe de ser el potencial, pues lo único que existe es la posibilidad de prolongar la línea recta, más no por ello significa que en realidad se pueda realizar una “recta infinita”, por lo tanto, el único infinito permitido es el potencial.

A Aristóteles no le gustaba la falta de forma dentro del concepto de “infinito”, pues creía que se generaba un sentido de indeterminación que cae dentro del concepto de la nada o dentro del concepto de lo absoluto, dependiendo si se concebía como infinitamente pequeño o infinitamente grande, nuevamente en su obra La Física (III,6), Aristóteles dice:

“El infinito no es aquello fuera de lo cual no hay nada, sino aquello fuera de lo cual siempre hay algo”.

De esta forma el infinito no es la nada o un absoluto, simplemente es algo que debido a su ilimitación nuestra mente es incapaz de concebirlo en su totalidad.

Estas ideas de Aristóteles nos anticipaban la posibilidad de pensar cantidades infinitamente grandes e infinitamente pequeñas. En el primer caso, y gracias a nuestra imaginación, podemos considerar cantidades infinitesimales como el llamado universo subatómico, donde tenemos cantidades infinitamente pequeñas, sin que jamás podamos imaginar un punto final en ese proceso. Igualmente, pero en sentido inverso, podemos pensar en cantidades potencialmente muy grandes que se presentan en el universo.

Puesto que para Aristóteles dentro del concepto numérico de infinito no existen los espacios o discontinuidades, para este es ilógico que dentro las cantidades geométricas y físicas se conciban espacios discontinuos.

Para explicar esta idea, Aristóteles aborda las paradojas Zenonianas descritas anteriormente en el texto, en donde cuenta como Zenón comete un error en sus mediciones de la Física, ya que este aborda el problema del movimiento por instantes, separando en pequeños tiempos algo que debería ser analizado como algo continuo.

En su libro Física, Aristóteles aborda el problema del movimiento especificando que todo fenómeno físico de movimiento debe estudiarse y describirse como algo que posee cantidades continuas. El pensador griego identifica los movimientos en dos tipos: circulares y rectilíneos, los cuales estudia como fenómenos continuos que tienen un inicio y un final.

Aportes fundamentales en el cálculo

Una de las más grandes contribuciones en el estudio de la velocidad fue realizada por Nicolás de Oresme (1320-1392), sus estudios se centran en las representaciones e interpretaciones de los gráficos geométricos, entre las diferentes gráficas que analizó se encuentra la gráfica de la famosa “regla mertoniana” o “el teorema de la velocidad media”.

La parte superior de este gráfico que se posiciona sobre las líneas perpendiculares que representan a la velocidad, forma una línea o curva a la que Nicolás de Oresme denominó como la “línea de intensidad”. Para un objeto que se acelera uniformemente, la línea de intensidad es oblicua (segmento \overline{OP} en la figura).

En otras palabras, con un simple gráfico se representó cómo un cuerpo que se mueve uniformemente va adquiriendo o perdiendo un determinado incremento de rapidez, el cual recorre en un tiempo determinado una distancia completamente igual a aquella que debería recorrer si se estuviera moviendo con rapidez uniforme durante el mismo tiempo con el grado medio de velocidad”.

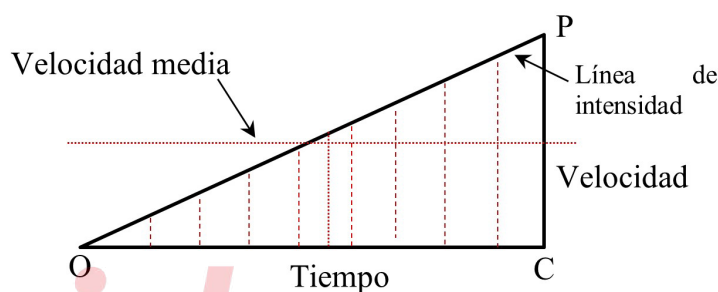
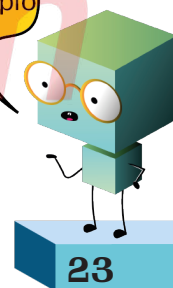
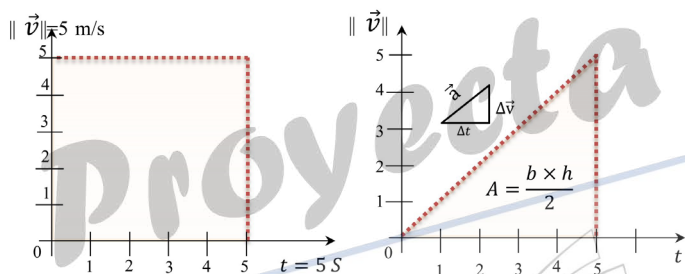


Figura 6. Demostración geométrica de Nicolás de Oresme sobre el teorema mertoniano de la velocidad media para un objeto que se acelera uniformemente.

Las líneas oblicuas son las que no tienen la dirección vertical ni horizontal. Ni forman ángulos rectos al cruzarse con éstas. En otras palabras son todas las líneas rectas que dividen el plano en dos partes, un ejemplo de una línea oblicua es una recta a 45°



De sus estudios sobre las gráficas de velocidad, Nicolás de Oresme comprendió que el área entre el eje del tiempo y la línea de intensidad es igual a la distancia total recorrida durante el intervalo de tiempo (desplazamiento). Por ejemplo, si se encontraba estudiando un gráfico de velocidad constante en donde se tiene a un vector que describe a un objeto que viaja a una velocidad ($\|\vec{v}\|$) igual a 5 metros por segundo (m/s), el cual se dirige hacia la derecha, y se desea conocer qué tan lejos ha viajado o se ha desplazado este objeto que se mueve a esta velocidad después de 5 segundos, Oresme tendría un gráfico como el que se muestra en la figura.



En esta gráfica tenemos en el eje de la magnitud de la velocidad a un objeto que se mueve a una velocidad constante de 5 metros por segundo (m/s), el cual lo realiza en un tiempo igual 5 segundos. Como la velocidad y el tiempo son igual a 5, nuestro vector lo vamos a graficar como una velocidad constante que no va cambia y se mantiene al mismo nivel en el momento en el que llega a los 5 segundos.

Ahora que tenemos nuestra gráfica podemos analizar dos estrategias para llegar a la conclusión de que el área bajo la curva es igual al desplazamiento, la primera se basa en obtener el área por métodos algebraicos y en la segunda se emplea la ecuación de velocidad, la cual nos dice que nuestro vector velocidad es igual al vector desplazamiento (distancia) entre el cambio en el tiempo $\vec{v} = \frac{\vec{s}}{\Delta t}$

Estrategia 1.

$$\Rightarrow \text{Área de un cuadrado} = l \times l = 5 \times 5$$

$$\therefore \text{Área de un cuadrado} = 25 \text{ unidades cuadradas.}$$

Estrategia 2.

En la ecuación de velocidad \vec{v} es el vector velocidad, \vec{s} es el desplazamiento y Delta (Δ) indica el cambio de posición en el tiempo (t).

De esta ecuación se despeja el desplazamiento (\vec{s}) y nos va a quedar que ese desplazamiento es igual al cambio en el tiempo por el vector velocidad, lo siguiente es sustituir datos, en donde tenemos nuestra velocidad y nuestro tiempo es de 5 segundos.

$$\vec{s} = \vec{v} \cdot \Delta t, \text{ sustituyendo valores.}$$

$$\vec{s} = 5 \frac{m}{s} \cdot 5s = 25 m$$

Como podemos ver, 25 es exactamente el área que se forma al entre la línea de la magnitud de la velocidad y la línea del tiempo, el cual es un cuadrado de altura y base 5. De esta forma, la magnitud del área bajo la curva es lo mismo que lo que encontramos para el desplazamiento empleando la ecuación de la velocidad.

Encontramos una relación similar entre el desplazamiento y el área bajo la curva en un objeto cuya velocidad va a estar aumentando en una relación uno a uno, lo cual significa que este objeto va a estar acelerando su movimiento. Recuerda que la aceleración se define como la variación de la velocidad a lo largo del tiempo.

Para nuestro caso, vamos a tener una aceleración (\vec{a}) que va a ser igual a 1 metro por segundo al cuadrado (m/s^2), en donde la magnitud de nuestra velocidad inicial va a ser igual a cero ($\|\vec{v}\|=0$), y se estará incrementando en 1 m por segundo.

Como la relación es uno a uno, si comenzamos en el punto de origen contaremos con una velocidad inicial de cero y el tiempo igualmente será cero, pasado un segundo tenemos la velocidad de 1 m/s y mi aceleración será de 1 metro por segundo al cuadrado, cuando transcurre otro segundo la velocidad se habrá incrementado otro metro por segundo, por lo que ahora tendrá una velocidad igual a 2 m/s y consecutivamente pasado 3 segundos mi velocidad se habrá incrementado otro metro por segundo por lo que en este tercer segundo la velocidad será igual a 3 m/s.

Por otra parte, si entendemos a la aceleración (\vec{a}) como el cambio de la velocidad entre el cambio en el tiempo observaremos que en este tipo de gráfica esta relación esta descrita por la pendiente o la inclinación de la línea de intensidad.

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{Cambio vertical}}{\text{Cambio horizontal}}$$

Puesto que en la gráfica la aceleración es una línea recta y constante, podemos conocer cuál es la distancia o el desplazamiento recorrido después de cualquier tiempo, por ejemplo, si deseo conocer cuál fue el desplazamiento después de que pasaron 5 segundos puedo emplear la fórmula para calcular el área de un triángulo, la cual es igual a la base por la altura por un medio, o bien:

$$\text{Área} = \frac{b \times h}{2}, \text{ en donde } b \text{ es la base y } h \text{ la altura del triángulo.}$$

⇒ Sustituyendo valores tenemos: $(5 \times 5) / 2 = 12.5 \text{ m}$

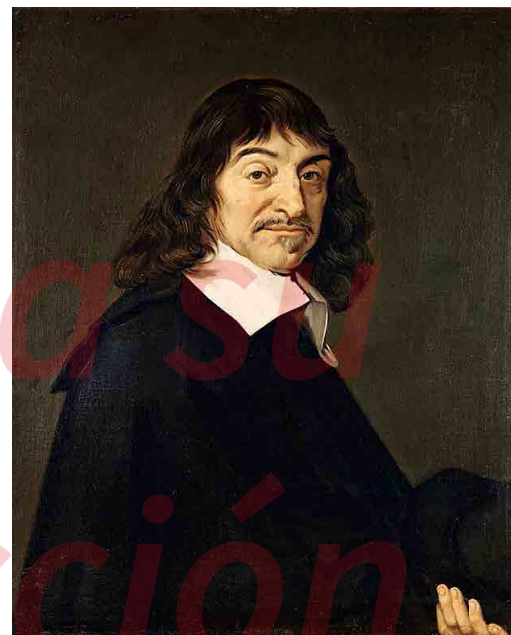
∴ El desplazamiento recorrido por un objeto después de 5 segundos cuando posee una velocidad de 5 m por segundo es igual a 12.5 m.

Como ves, independientemente de cómo varía la línea de intensidad; el argumento que Oresme proporcionó fue una correcta interpretación sobre como la distancia total recorrida siempre estará representada por el área debajo la línea de intensidad.

Posterior al establecimiento de un orden en el concepto de infinito realizado por Aristóteles, y después de una gran cantidad de avances matemáticos realizados por grandes pensadores de su época, los cuales ayudaron a sentar las bases de la Física y la Matemática, aparece en la historia René Descartes. Entre los primeros avances realizados por René Descartes (1596-1650) fue la correcta noción del concepto de posición.

Para ilustrar el concepto, Descartes menciona a la Luna como un punto fijo de referencia para un hombre que camina en la oscuridad de la noche, sin embargo, como se desconoce la posición del sujeto, a medida que este avance o retroceda se podría creer que la Luna es de un tamaño determinado basándose solo en su apariencia visual, pero en realidad como no se cuenta con una posición esta puede ser mucho más grande o más pequeño de lo que parece.

Para Descartes el no contar con un método de cuantificación como un sistema de posicionamiento, fácilmente puede generar resultados que sean engañosos, y que por lo tanto, no deben ser tomados en cuenta sin una rigurosa valoración.



La idea de posicionamiento tomaría forma dentro del trabajo de René Descartes con la invención del concepto de un plano de coordenadas cartesianas. Mediante este avance ahora los matemáticos eran capaces de vincular la geometría con el álgebra mediante la representación de puntos en un plano mediante pares ordenados de números. Con ello se contaba con una forma de describir las figuras geométricas utilizando ecuaciones algebraicas, lo que a su vez simplificó el estudio de las tangentes, y con ello la evolución estrepitosa del cálculo diferencial e integral.

Una tangente se definía como “una línea que toca a una curva pero no la corta”. De esta forma la tangente se ajusta a la curva cerca del punto de contacto de manera óptima.

Otro aporte realizado por Descartes fue la noción de “ley de inercia”, la cual establece que un objeto en movimiento permanecerá en movimiento a menos que sea perturbado por una fuerza externa. Esta idea fue fundamental como precursora importante para la formación de la primera ley de Newton.

En síntesis, las contribuciones de René Descartes a la comprensión del cambio de posición y el movimiento de un objeto, sentaron las bases para la construcción de la física y las matemáticas modernas, motivo por el cual su influencia sigue siendo evidente en estos campos hasta el día de hoy.

Práctica de aprendizaje

Resuelve los siguientes problemas de velocidad y distancia, empleando la fórmula de la velocidad, ($Velocidad = Distancia / Tiempo$)

1. Una pelota rueda siguiendo una trayectoria en línea recta y recorre una distancia de 10.24m en 5.3 s, ¿A qué velocidad viajó la pelota?
2. Una mariposa vuela en línea recta con una velocidad de 7.35m/s durante 28.29 s, ¿cuál es la distancia total que recorre la mariposa?
3. La luz que sale del Sol toma alrededor de 8 minutos para llegar a la Tierra. Si consideramos que el Sol se encuentra a una distancia de aproximadamente 149, 871,200 km, ¿A qué velocidad viaja la luz por segundo?

- 
- 
4. ¿A qué velocidad circula un automóvil de carreras si recorre 50.64 km de pista en 14.6 minutos?
5. ¿Y cuántos kilómetros recorre el mismo automóvil si con la velocidad obtenida del problema anterior recorre la pista en solo 9 minutos?
6. Juan viaja en bicicleta a una velocidad de 17.8 km/h durante 3:30 minutos, ¿Qué distancia habrá recorrido?
7. Una bicicleta circula en línea recta a una velocidad de 15km/h durante 42 minutos. ¿Qué distancia recorre?
8. ¿Y si la bicicleta circulara a 20km/h?
9. Si Pedro recorre con sus patines una pista de 218.5 m en 56 s, ¿a qué velocidad circula?
10. ¿Y si Pedro reduce el tiempo a 40 segundos?
- Proyecta tu futuro*
- PLANEA*
Editorial
- Prohibida su reproducción*

La filosofía como cimiento del razonamiento matemático

Como hemos visto hasta ahora, a lo largo de la historia de la humanidad la relación entre el pensamiento filosófico y el desarrollo de conceptos matemáticos ha sido una asociación compleja y fructífera. Desde los primeros razonamientos lógicos realizados por los antiguos filósofos griegos hasta los sofisticados métodos del cálculo moderno, la filosofía y las matemáticas han influido la una en la otra y se han enriquecido mutuamente.

El origen filosófico de las Matemáticas modernas tiene su fundamento en las ideas propuestas por los matemáticos y filósofos griegos como Platón, Aristóteles y Arquímedes. Dentro de estos filósofos, sobre el primero del cual se debe de hablar es del filósofo Tales de Mileto, quien de acuerdo con lo que sabemos hasta ahora, fue el primer filósofo conocido. De Tales se conocen dos teoremas, el primero de ellos es muy sencillo y lo usamos como ejemplo.

Primer teorema de Tales.

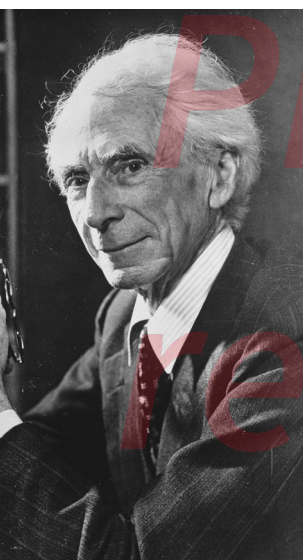
Si tomamos dos triángulos cualesquiera y encontramos que los lados de uno son proporcionales a los del otro, entonces los ángulos correspondientes de esos triángulos serán iguales.

Este teorema es muy útil en la resolución de problemas de geometría, en donde se necesita el conocer la dimensión de un lado u ángulo desconocido dentro de uno de triángulos semejantes.

Por ejemplo, si tenemos dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$, donde los lados correspondientes son proporcionales ($AB/DE = BC/EF = AC/DF$), entonces los ángulos correspondientes serán iguales o congruentes, es decir que, $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, y $\angle C \cong \angle F$.

Posteriormente, también se destacó el trabajo del filósofo y matemático Pitágoras. Su contribución más conocida fue el teorema que lleva su nombre. El Teorema de Pitágoras establece que en un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. Este teorema se aplica en la trigonometría y otras áreas de las matemáticas.

Además, Pitágoras y sus seguidores descubrieron, la existencia de los números irracionales, que son aquellos números que no pueden expresarse como una fracción, pues su expresión racional no es exacta ni periódica. Un ejemplo es π , que es la relación entre el diámetro y la circunferencia, que equivale a 3.141592653, otro número es $\sqrt{2}$ el cual aproximadamente es 1.414213. El descubrimiento de los números irracionales contribuyó a la formulación de la teoría de los números.



A continuación, fue Aristóteles quien desempeñó un papel muy importante en los fundamentos de las matemáticas, aunque no se adentró en la práctica de las matemáticas. Si bien no las desconocía, pues había sido el discípulo más distinguido de Platón en la Academia, tenía otros intereses como la botánica, la zoología, la lógica y la política. Pese a todo, Aristóteles es importante para las Matemáticas ya que se ocupó de definir los conceptos de axiomas, teoremas, definiciones y demostraciones, los cuales, son fundamentales para el método matemático.

Una interacción más entre la filosofía y la matemática es la que desarrolló el filósofo y matemático británico Bertrand Russell. Junto a su maestro Alfred North Whitehead escribió entre 1910 y 1913 el libro *Principia Mathematica*, en tres volúmenes, que puso los cimientos de la matemática y la lógica simbólica modernas. El trabajo de estos filósofos es un intento de deducir la matemática de una base lógica precisa. En el libro se aborda teoría de conjuntos, números cardinales, números ordinales y números reales.



Cierre

En estos temas, aprendimos que la evolución del cálculo moderno se encuentra arraigada en la confluencia entre la filosofía y las matemáticas a lo largo de la historia. Desde los cuestionamientos planteados por Aristóteles hasta los desarrollos formales de la geometría propuestos por Descartes. Estos pensadores sentaron las bases conceptuales y metodológicas para el cálculo diferencial e integral, abriendo las puertas a un campo matemático fundamental para comprender los conceptos de variación, los procesos infinitos y el movimiento en el mundo natural y abstracto.



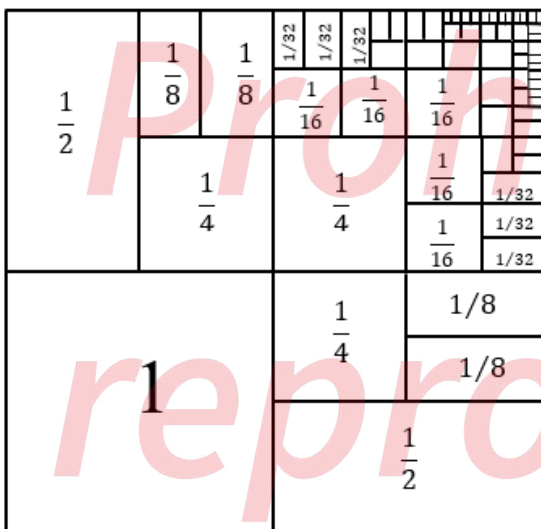
Práctica de aprendizaje



Para resolver los siguientes ejercicios presentes en esta práctica de aprendizaje, se te solicitará que:

- Encuentres soluciones a problemas de distintos contextos que requieran el entendimiento de los procesos infinitos para su resolución.
- Analices el comportamiento de un proceso infinito mediante representaciones gráficas, tabulares y algebraicas.
- Emplees métodos aritméticos y algebraicos para resolver problemas que involucren procesos infinitos.
- Identifique las características de los procesos infinitos utilizando diferentes representaciones, como diagramas, gráficas, tablas o explicaciones verbales.
- Reconozcas un proceso como una secuencia que produce resultados, siendo infinito cuando pueda generar un resultado adicional indefinidamente.

1. Conforme a la imagen geométrica, encuentra la suma que represente a esta serie infinita



2. Determina los primeros diez valores de la función y registra los resultados en la siguiente tabla:

x									
f(x)									

3. Imagina que con la ayuda de una cinta métrica trazas un segmento de longitud uno. Ahora que tienes a esta línea el proceso consiste en tomar a esta línea y partirla por la mitad del segmento, luego como segundo paso tomas a la mitad del segmento restante y la vuelves a dividir en dos, esta acción de dividir en dos sucesivamente se repite continuamente hasta el punto en donde la longitud sea tan pequeña que solo podamos hacer conjeturas sobre este proceso. Conforme la idealización del proceso de dividir a una línea por la mitad, responde a los siguientes incisos.

- a) Representa gráficamente el proceso de división por la mitad en una línea con una longitud de uno.
- b) Después de haber dividido la línea por la mitad 3 veces ¿cuál es la longitud de tu línea?
- c) Encuentra una expresión matemática que generalice a este proceso en donde constantemente dividimos una línea por la mitad



Práctica transversal



En esta práctica es necesario que hagas uso de los conocimientos de los recursos sociocognitivos de Cultura Digital y Lengua y Comunicación para realizar un resumen de los videos que se encuentran en los siguientes enlaces o códigos QR.



Escanea o ingresa el link para poder acceder

<https://cutt.ly/8er7i570>

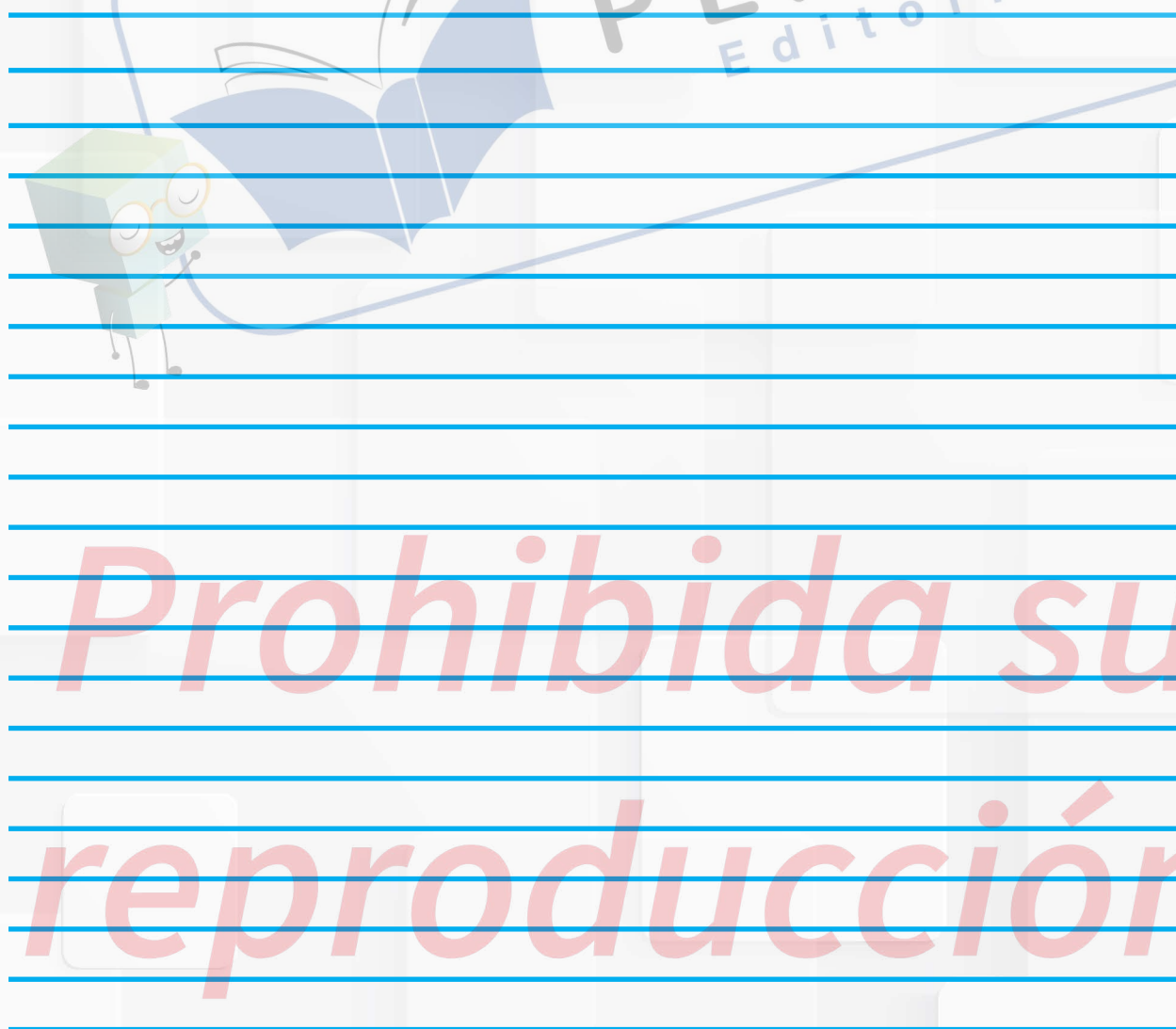
Teorema de Pitágoras



Escanea o ingresa el link para poder acceder

<https://cutt.ly/9er7xYi8>

Pitágoras y las cuerdas



PLANEA Editorial

Prohibida su reproducción

Fundamentos del cálculo diferencial



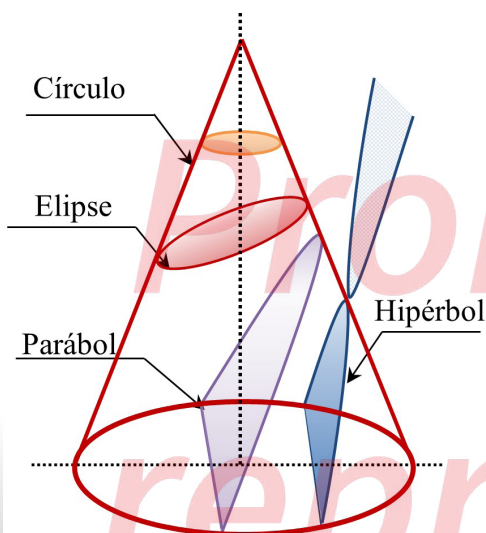
La historia del desarrollo de las matemáticas dependió enteramente de la historia de las curvas, de las secciones cónicas y del estudio de los elementos que las componen, es decir del análisis de diámetros, tangentes, centros, asíntotas, focos, vértices, etc. a continuación se ofrece un relato más detallado y específico de la evolución del concepto de recta tangente en el cálculo matemático:

Antecedentes en los antiguos griegos

Los antiguos griegos tenían una comprensión geométrica muy amplia de las figuras geométricas regulares, sin embargo, su conocimiento sobre las curvas era aún limitado, este conocimiento faltante comenzó su desarrollo conceptual más tarde con los postulados de los tres matemáticos más destacados del mundo griego antiguo: Euclides, Apolonio y Arquímedes

Euclides (325 a. C.- 265 a. C.), fue una de las mentes más grandes del mundo griego, es por ello que para los matemáticos se le ha considerado “el padre de la geometría”. En su obra escrita de los elementos, en el tercer libro, define a la recta tangente a un círculo como aquella línea que toca al círculo en un punto mientras esta se sigue prolongando, sin cortar al círculo en otro punto.

El siguiente en aportar un gran avance en el concepto formal de línea tangente fue el científico Apolonio de Perga (262 a.J.C.-180 a.J.C.), este define a la recta tangente como la recta que toca a una cónica en un único punto “P”, tal que no es posible trazar otra recta pasando por “P”. El uso que le dio Apolonio al concepto de línea tangente fue proponer la creación de cónicas a partir de la conexión del punto tangente con los demás puntos de la figura cónica, la forma en como lo pronuncio Apolonio fue de la siguiente forma:



Sea un círculo cualquiera y un punto fuera del plano del círculo, dibuja una línea recta que conecte el punto con un punto de la circunferencia del círculo. El movimiento de la línea a lo largo de la circunferencia genera la superficie de un cono con dos ramas. Una sección del cono es la curva que se produce por su intersección con un plano. Si el plano no corta la base circular, entonces la curva es una elipse; si cruza la base, pero no corre paralela a ninguna de las líneas generadoras, entonces la sección es una hipérbola; y si corta a la base y además corre paralela a una de las rectas generadoras, entonces la sección es una parábola.

Figura 7. Representación de las secciones cónicas descritas por Apolonio.



Apolonio también definió y estudió los diámetros de las secciones cónicas, sus centros, asíntotas, focos y tangentes, por ejemplo, mediante la proyección de líneas que se desarrollan desde el centro de un círculo pudo determinar cómo dibujar dos círculos tangentes a una recta.

Proposición. Sean dos rectas K y J y el punto de tangencia T_1 en J, los centros O_1 y O_2 de las circunferencias buscadas están alineados sobre una recta perpendicular a J que pasa por T_1 . La intersección de estos lugares geométricos determina la posición de los radios O_1T y O_2T y los puntos de tangencia T_2 y T_3 sobre la recta K. (ver fig. 8)

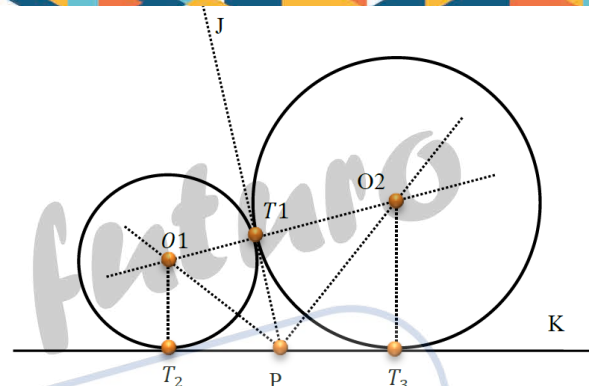


Figura 8. Circunferencias tangentes a dos rectas "K" y "J" que se cortan en el punto "P", esta circunferencias se intersectan en el punto de tangencia común T_1 .

Respecto a Arquímedes se identifican dos ideas en donde emplea al concepto de la recta tangente, la primera fue expuesta en su texto llamado "sobre las espirales", en este se enseña como calcular la recta tangente a una espiral. En la segunda idea de Arquímedes se plantea el uso de la tangente es en el método de la cuadratura de las curvas, dicho método es empleado en la técnica de exudación o de agotamiento.

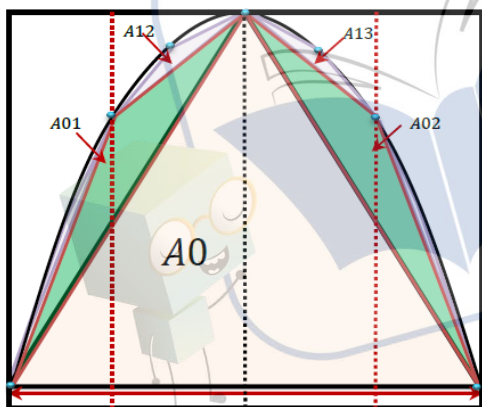


Figura 9. Representación de la cuadratura de una curva propuesta por Arquímedes.

La cuadratura de la parábola propuesta por Arquímedes es explicada en la compilatoria de toda su obra que lleva por nombre "Archimedes opera omnia", en este escrito se demuestra cómo funciona el método de la cuadratura de la parábola, el cual consiste en inscribir una serie figuras como triángulos delimitadas por una curva cuya área sea conocida o fácil de calcular, por lo común se toman como ejemplo curvas como una circunferencia o una parábola plana, para nuestro caso tomaremos a esta curva como ejemplo de cuadratura.

Respecto a la cuadratura de la parábola, Arquímedes llegó a la conclusión que el área de un segmento de parábola es igual a $4/3$ del área del triángulo inscrito. Para una parábola cuya ecuación cartesiana general es: $y=ax^2+bx+c$

Como se aprecia en la anterior imagen, el segmento de parábola que se muestra tiene inscrito un triángulo A_0 y dos triángulos inscritos A_{01} y A_{02} de base y altura igual, en donde A_1 es igual a la suma de A_{01} y A_{02} , ($A_1 = A_{01} + A_{02}$). En los cuatro segmentos restantes de parábola se inscriben los triángulos A_{11} , A_{12} , A_{13} , A_{14} , en donde A_2 es igual a la suma de A_{11} , A_{12} , A_{13} y A_{14} , ($A_2 = A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14}$), este procedimiento se realiza un número infinito de veces sucesivamente siempre buscando que la suma del área de los triángulos se aproxime al área de la curva.

Los espacios que restan por cubrir entre los triángulos y la parábola se hacen cada vez más pequeños, lo cual hace que de igual forma los nuevos triángulos que se inscriben en estos espacios también sean más pequeños, pero sin importar si estos son cada vez más reducidos podemos ver que se mantiene la proporción, en donde cada serie de triángulos es igual a $1/4$ del área de los triángulos precedentes.

Puesto que conocemos que los triángulos se van sumando y construyendo de esta forma al segmento de parábola y que $A_1 = 1/4 A_0$, $A_2 = 1/4 A_1$, $A_3 = 1/4 A_2$,... Por tanto, $A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + \dots = 4/3 A_0$.

Problemas que desafiaron a los matemáticos

En el siglo III antes de Cristo, Apolonio de Perga escribió un tratado llamado “sobre tangencias”. Una obra que se ha perdido en el tiempo, sin embargo, en un texto de Pappus de Alejandría se rescata un planteamiento del escrito por Apolonio, el cual es un problema que puede pronunciarse de la siguiente manera:

“Sean tres objetos, cada uno de los cuales puede ser un punto, una recta o un círculo; construir un círculo que sea tangente a los tres objetos dados o que los contenga en el caso de los puntos, por lo tanto los círculos buscados pueden ser tangentes a los círculos o líneas dados y/o pasar por los puntos”.

Para resolver este problema, intervinieron muchos matemáticos, los cuales abordaron el problema proponiendo diversas soluciones, pero pasarían varios siglos para que uno de ellos estableciera una sorprendente relación matemática como condición para resolverlo, su nombre fue René Descartes.

Sumado al desarrollo del plano de coordenadas, René Descartes también presentó un estudio propio de la tangente; mediante un método único, contribuyó a resolver el problema propuesto por Apolonio de Perga, este método fue una innovación la cual no se basaba en la idea de infinitesimales, Descartes dirigió su atención hacia otra forma de abordar el problema de encontrar la tangente a una curva. El enfoque Descartes para encontrar la tangente es conocido en matemáticas como “El círculo de Descartes” mediante este método se describe analíticamente la tangente a una curva en términos de ecuaciones algebraicas.

Pierre de Fermat (1601-1665)

Fermat hizo contribuciones tempranas al concepto de tangentes. En su trabajo sobre máximos y mínimos, analizó diferentes métodos para encontrar líneas tangentes a curvas.

Al igual que otros creadores del cálculo estableció un marco sistemático para el concepto de tangente desde su intuición y profundo conocimiento de la matemática y la física, principalmente desde la dinámica, para avanzar en el concepto de tangente imaginó de qué manera podría emplear una recta para describir el movimiento de un objeto a lo largo de una “curva continua” $y=f(x)$.

Para representar el desarrollo del movimiento de un objeto en una función, Fermat pensó en representar el proceso de dibujar una recta tangente a la curva en cualquier punto P de la curva, tomando otro punto Q, también ubicado sobre la curva, trazando la recta PQ que une P y Q, y luego, en la imaginación, dejando que el punto Q se deslice a lo largo del arco de la curva $y=f(x)$, en donde el punto Q a P, hasta que Q coincidió con P, cuando la cuerda PQ , en la posición límite que acabamos de describir, se convirtió en la tangente PP a la curva en el punto P, exactamente lo que estaba buscando.

Si se expresa en términos del lenguaje algebraico o analítico el posicionamiento de las coordenadas de los puntos P y Q, tenemos que en la gráfica el punto P estará posicionado en (x,y) mientras que las coordenadas $(x+a,y+b)$, correspondientes al punto Q.

El siguiente paso es analizar y traducir el movimiento que realiza el punto Q hasta coincidir con P, en este análisis podemos ver en la gráfica como es que antes de iniciar con su trayectoria la pendiente "m" de la cuerda PQ es igual a (b/a), lo cual si recordamos representa una medida de la inclinación o pendiente de la cuerda PQ con relación al eje X.

Una vez que el punto Q comience a deslizarse hasta coincidir con el punto P, los valores de la distancia vertical "b" y horizontal "a" se irán disminuyendo continuamente cada vez más hacia cero, es decir que simultáneamente cuando las coordenadas de Q sean iguales a las de P tanto "b" como "a" se aproximarán al valor cero; en donde las coordenadas de Q son (x+a, y+b). De esta forma el resultado de la pendiente de la tangente en el punto P, después de que Q hubiera coincidido con P es igual al valor límite de b/a, el cual finalmente se convierte en los valores de las coordenadas (x, y) del punto P, finalmente ahora que Q y P son un solo punto ya se puede trazar la tangente.

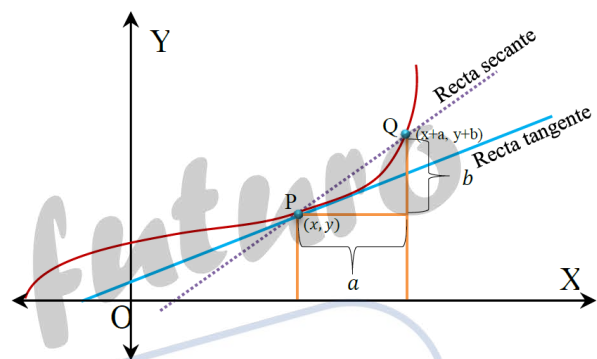


Figura 9. Movimiento del punto Q hacia el punto P.

El enigma de la tangente

El uso de rectas dentro la matemática griega siempre fue indispensable para conocer las propiedades geométricas de las curvas, las rectas eran empleadas para formar diferentes ángulos con las curvas, de tal forma que las figuras formadas fuesen cuerpos geométricos conocidas por ellos, tal como sucede en la cuadratura de la parábola o en el método de exudación.

El uso de la tangente aplicado a curvas se desarrolló durante la época dorada de la matemática griega, matemáticos como Euclides, Apolonio y Arquímedes se valían de rectas secantes y tangente para construir nuevas curvas o para conocer el valor de algunos elementos. Como ejemplo podemos ver la espiral del Arquímedes.

Un modo práctico de la utilización de la tangente a una curva es el uso que se le da para la obtención del radio de un círculo C, donde la tangente en un punto P en C es esa única línea que es perpendicular a la línea radial que conecta P con el centro del círculo.

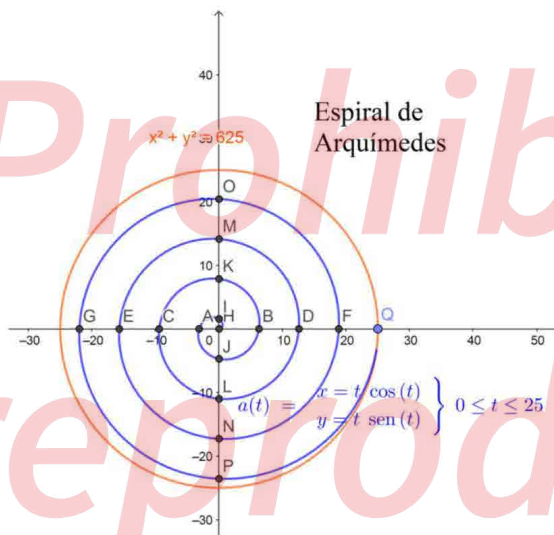


Figura 10. Espiral de Arquímedes inicialmente construida a partir de una línea tangente al círculo

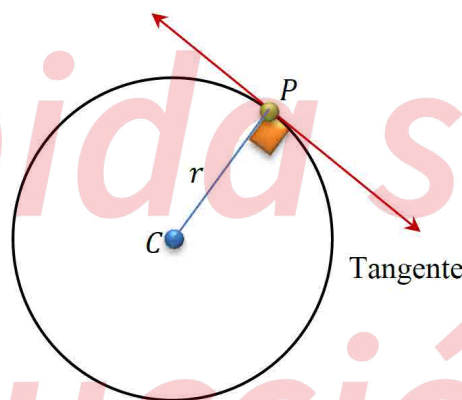


Figura 11. Proyección de una tangente en un punto de un círculo

El dominio que tenían los antiguos matemáticos griegos de las rectas secantes y tangentes en figuras curvas fue lo que abrió la posibilidad a que más adelante en la historia, astrónomos como Kepler pudiesen explicar mediante rectas y curvas el movimiento de las orbitas de distintos planetas.

Por ejemplo, Kepler descubrió que la forma más sencilla de explicar el movimiento de Marte era suponiendo que este se movía a lo largo de una órbita con forma de una elipse, siendo el Sol en uno de sus focos. Estas observaciones planetarias llevaron a Kepler a postular tres leyes:

1. La órbita de cada planeta es una elipse, con el sol en uno de sus focos.

2. La línea que une el sol con el planeta barre el área a un ritmo constante.

3. El cuadrado del período de cualquier planeta alrededor del Sol es proporcional al cubo de la distancia media del planeta al Sol.

Cuando Kepler fusionó los conceptos de movimiento, trayectoria, tiempo y espacio en una sola idea, allanó el camino para que otros matemáticos y astrónomos dieran el próximo gran paso en la ciencia. Este avance se materializó con la explicación de Isaac Newton sobre las leyes de Kepler en términos de Matemáticas y Física, como se detalla en su obra fundamental "*Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*" (Principios Matemáticos de la Filosofía Natural), más conocida como "*Principia Mathematica*".

Newton se interesó por las Leyes de Kepler gracias a su análisis de la tercera ley del movimiento planetario, que relaciona el tiempo que un planeta tarda en orbitar alrededor del Sol (su período) con la distancia media del planeta al Sol (su semieje mayor). Al intentar deducir la órbita de un planeta, Newton utilizó sus propias leyes del movimiento y la ley de la gravedad. Sin embargo, se encontró con una dificultad: la órbita de un planeta alrededor del Sol sigue una trayectoria que cambia y no es constante, durante esta trayectoria a medida que el planeta orbita, su movimiento cambia continuamente debido a la alteración de la fuerza gravitatoria del sol, lo que lleva a ajustes constantes en su dirección y velocidad. Por otro lado, las leyes del movimiento de Newton solo describen pequeños cambios instantáneos de posición durante el movimiento de un cuerpo, en donde las fuerzas aplicadas son las mismas.

Newton comprendió que podía deducir la órbita del planeta al expresar estos cambios instantáneos en términos de la fuerza que actuaba sobre él en cada momento, para ello introdujo el concepto de "fluxiones", el cual era un punto que servía para representar como cambia la posición de un planeta al entrar en movimiento durante intervalos de tiempo muy pequeños, obteniendo así una imagen integrada de su órbita.

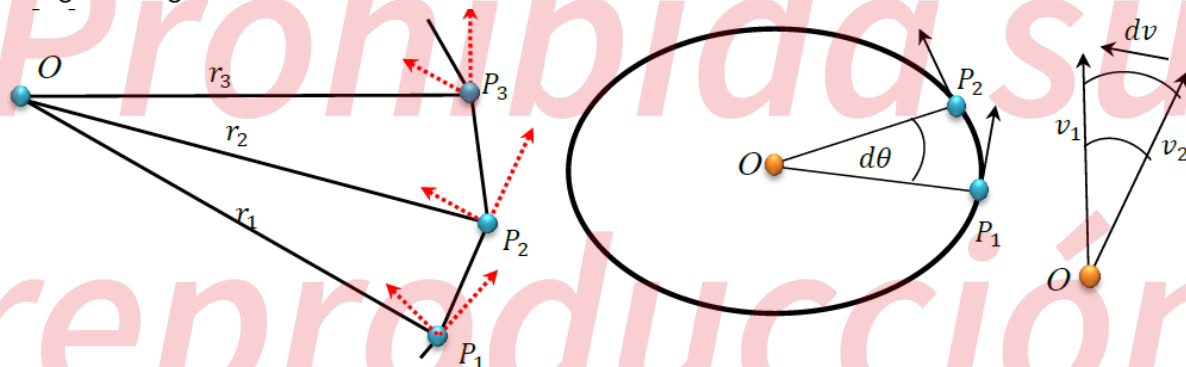


Figura 12. Movimiento de un planeta bajo una fuerza central impulsiva, en donde una fuerza central impulsiva es un tipo específico de fuerza que actúa sobre un objeto en una dirección hacia o desde un punto central. La característica distintiva de una fuerza central es que su magnitud depende únicamente de la distancia entre el objeto y el punto central, y no de la dirección en la que se mueve el objeto. Para nuestro caso la fuerza central será la gravedad que ejerce el sol sobre los planetas.

Newton fue lo suficientemente inteligente para comprender que mediante la mecánica clásica no podría calcular ni la velocidad ni la trayectoria que sigue un planeta a lo largo de su órbita, sin embargo, él propuso que en lugar de cuantificar de una sola vez el movimiento de un planeta, podría partir su cambio de posición en fragmentos o instantes suficientemente pequeños, al punto de considerar que el cambio de posición de un planeta entre un punto y otro es igual a una cantidad que tiende a "cero" (es infinitesimal), esto significa que entre un punto P_1 y P_2 proactivamente no hay ningún cambio de posición en absoluto, pero si consideramos los cambios que se van acumulando entre el punto P_1 y P_{100} sí que notaremos un cambio sobre la posición del objeto.

Newton consideraba que calcular la velocidad instantánea puede ser muy complicado, por lo que este problema lo abordó de forma muy gradual. Partió de la definición estándar de velocidad de un cuerpo como la distancia que recorre un cuerpo en un tiempo dado dividida por el tiempo, lo que lleva a la fórmula $v=d/t$, donde "d" es la distancia que recorre el cuerpo a lo largo del eje "x" en el tiempo "t", comenzando desde el origen 0. Pero esta ciertamente no es la velocidad instantánea si la velocidad cambia durante el intervalo de tiempo "t".

Es por ello que para obtener la velocidad instantánea en cualquier momento durante la trayectoria orbital de un planeta, Newton vio que era necesario considerar que el intervalo de tiempo durante el movimiento del cuerpo tendría que ser muy pequeño. Si, en el tiempo (t), es un intervalo de tiempo muy corto durante el cual el planeta se ha movido una distancia muy pequeña (x), entonces la relación d/t será muy pequeña, si "t" es lo suficientemente corta, proporcionará una velocidad instantánea del objeto más exacta.

La forma en como podemos expresar que el incremento de la velocidad debe tender a cero, es mediante un limite el cual exprese la relación distancia sobre tiempo $\lim_{t \rightarrow 0} \Delta d / \Delta t$, el significado que Newton le otorgó a esta expresión es la velocidad instantánea de un cuerpo en un momento "t". En esta expresión encontramos lo que es considerado, el comienzo de lo que ahora llamamos cálculo diferencial, el cual está fundamentado en el cambio infinitesimal de una cantidad resultante de los cambios infinitesimales de otra cantidad.

El método elegido por Newton para calcular la velocidad a la cual se mueve un planeta durante su trayectoria, fue a través del cálculo de la "tasa de cambio" respecto al tiempo de los cuerpos que se encuentran en movimiento.

En Física, dentro del concepto de movimiento, la velocidad es la tasa de cambio de posición de un objeto respecto al tiempo. Esta es considerada como positiva si el movimiento es hacia adelante o negativa si es hacia atrás, o bien puede ser cero si el objeto está en reposo.

Glosario

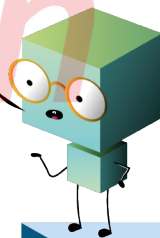


Tasa de cambio o variación

En matemáticas y economía la Tasa de Variación es un concepto utilizado para medir el cambio de una variable en un intervalo de tiempo específico. Se calcula dividiendo el incremento en la variable dependiente "y" entre el incremento en la variable independiente "x".

La Tasa de Variación es fundamental en el análisis de fenómenos que experimentan cambios constantes, como el crecimiento económico, las tasas de interés o el desarrollo de poblaciones, ya que proporciona una representación cuantitativa de la tendencia de cambio en un período determinado.

Para Leibniz algo infinitesimal es una cantidad que es más pequeña que cualquier cantidad concebible por la mente humana y que por lo tanto, es esencialmente igual a cero.



Explorando soluciones intuitivas al problema de la tangente

Gracias al conocimiento obtenido a partir del análisis de las leyes de Kepler, Isaac Newton (1643-1727) fue perspicaz al darse cuenta de que los conceptos de diferencial e integral pueden combinarse mediante una relación inversa. En otras palabras, las diferenciales y el cálculo integral son dos operaciones complementarias.

Newton propuso un nuevo teorema fundamental del cálculo que expresaba lo dicho por Fermat en términos más simples y adaptados a la nueva matemática cartesiana. A través de este teorema, podemos describir el movimiento de un objeto a lo largo del eje X .

A través del nuevo teorema fundamental del cálculo, Newton estableció un gráfico en donde se vincula el concepto de derivada con el de integración como una sumatoria de áreas. Para comprender este gráfico pensemos en una función $y=f(x)$ y supongamos que la gráfica de la función se ve como en la figura.

Glosario

Derivada

La derivada de una función en un punto dado puede interpretarse geométricamente como la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto. La pendiente de esta recta tangente representa la tasa de cambio instantánea de la función en ese punto. Formalmente, si tienes una función $f(x)$, su derivada en un punto " x " estará representada como $f'(x)$ o (df/dx) . Por otro lado, la integral de una función $f(x)$ en un intervalo dado representa el área bajo la curva de $f(x)$ dentro de ese intervalo. Formalmente, la integral definida de $f(x)$ de " a " hasta " b ", esta se representa como:

$$\int_a^b f(x) dx$$

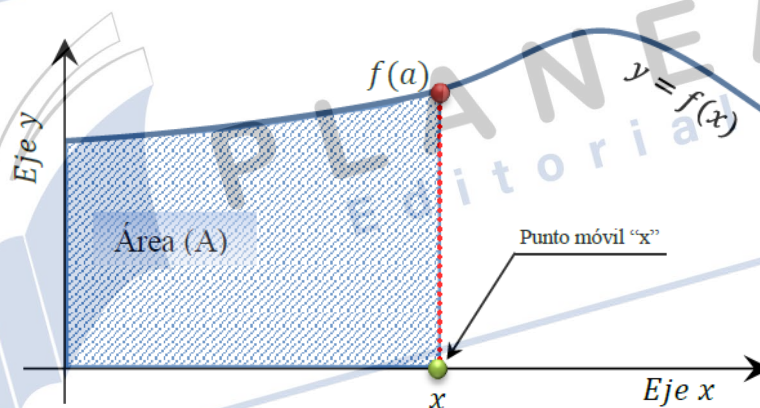


Figura 13. Representación del teorema fundamental del cálculo.

Para la explicación de este teorema únicamente se considerará al primer cuadrante del plano cartesiano, por lo que supondremos que la función $y=f(x)$, se encuentra completamente por encima de la región negativa del eje Y y a la derecha del eje X .

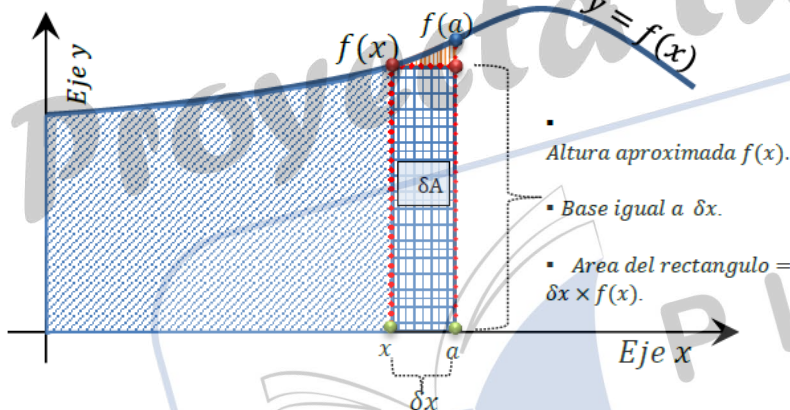
Así que enfocándonos hacia la derecha del eje Y nos podemos preguntar cuál es el área bajo la gráfica $y=f(x)$, la respuesta va a depender de qué tan lejos quiero mover un valor " x " sobre el eje de coordenado de las X , supongamos que quiero moverme hacia el lado derecho del eje X para incrementar el área, entonces puedo tomar este valor " x " y moverlo tanto como quiera hacia la derecha para indicar el crecimiento del área.

Por lo tanto, si el valor de " x " es igual a un número grande, el área debajo de este gráfico también será grande, mientras que si el valor de " x " es igual a un número pequeño, el área debajo del gráfico será pequeña, de hecho, si " x " es igual a cero, entonces el área debajo de la gráfica será cero.

Para indicar el área debajo de la gráfica $y=f(x)$ se empleara a la letra " A ", por lo que " A " es el área debajo de $y=f(x)$, de esta forma el área dependerá del valor que elegimos para " x " en otras palabras el área " A " está en función de " x ", o bien " A " depende de " x ", entonces matemáticamente escribimos esto como: $A=A(x)$.

La dependencia entre el área y el valor que elegimos para "x", es directamente proporcional, es decir que entre más grande el valor "x" el valor del área también será más grande y mientras más pequeño el valor de "x" más pequeño será el valor del área.

Ahora regresemos a la figura y veamos el gráfico, si nos preguntamos cuál es la altura de la línea punteada que se proyecta desde el punto "x", simplemente debemos de observar el valor de "y" en ese punto que se encuentra en la curva $y=f(x)$, por lo tanto simplemente es la función evaluada en el valor de "x", o bien la altura o la longitud de esta línea punteada es solo $f(x)$ de la función evaluada en este punto.



A continuación hagamos un ejercicio mental e imaginemos que pasaría si aumentamos "x" en una cantidad muy pequeña, para representar el incremento podremos considerar el escribir un punto "a" y a esta pequeña distancia que va de "x" hasta "a" la conoceremos como delta "x" y se va a escribir como δx , (a este simbolo tambien se le representa como Δx).

Figura 14. Representación de un incremento en la velocidad en el teorema fundamental del cálculo.

El hecho de mover un poco este punto "x" más hacia la derecha, cambia el área existente, pasando de medir del origen hasta "x" a medir del origen

hasta el punto "a", o bien hasta el nuevo incremento δx , en nuestro caso vamos a representar esta contribución adicional al área como una región sombreado en forma rectangular a la cual vamos a llamarla como delta A, o bien (δA).

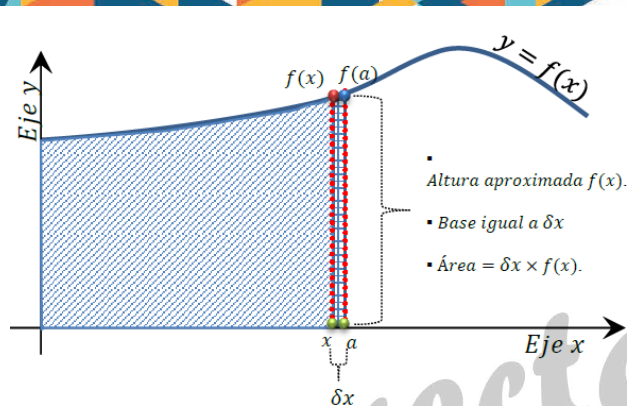
Para encontrar el valor de delta A, (δA), intentaremos entender exactamente qué es lo que nos muestra este gráfico, podemos observar que la altura de la línea en "x" es igual a $f(x)$ y también podemos ver que el ancho de esta columna es delta "x", entonces puedo obtener un valor aproximado para esta área asumiendo que es una sección rectangular, en donde para este cálculo será necesario ignorar a este pequeño fragmento en forma de triángulo que se encuentra en la parte superior del rectángulo, si asumo que es una sección rectangular, entonces el área adicional delta A, (δA) en forma de rectángulo es $f(x)$ multiplicada por delta "x", eso es aproximadamente $\delta A=f(x) \cdot \delta x$.

Si ahora dividimos ambos lados de la fórmula por delta "x", (δx) eso me dará delta "A", (δA) sobre delta x (δx) igual a $f(x)$, matemáticamente expresado como:

$$\frac{\delta A}{\delta x} = \frac{f(x) \cdot \delta x}{\delta x} = f(x)$$

Este resultado es la tasa de cambio en "x" con respecto a la distancia δx , lo cual recibe el nombre de la tasa de cambio de área con respecto a "x" y lo que nos dice es que el incremento de área representado por la región rectangular es aproximadamente igual a $f(x)$

¿Cómo podríamos obtener un cálculo más preciso? sin tener que dejar a un lado el área del pequeño fragmento en forma de triángulo ubicado en la parte superior del rectángulo, una manera de hacerlo más preciso es haciendo que el rectángulo sea aún más delgado al permitir que delta x, (δx) sea más pequeño.



- Altura aproximada $f(x)$.
- Base igual a δx
- Área = $\delta x \times f(x)$.

Veamos gráficamente que sucede ahora si consideramos que los punto "x" y "a" están cada vez más juntos, podemos suponer que la región sombreada es de hecho un rectángulo muy delgado con una altura $f(x)$ y un ancho (δx) más pequeño, por lo tanto el área rectangular es: Base \times Altura = $\delta x \times f(x)$

Nos hemos acercado bastante al resultado real del área rectangular, sin embargo, este resultado siempre se puede mejorar aún más, para ello lo que haremos será hacer a delta "x" cada vez más pequeño, lo cual lo acercara infinitamente a cero, con ello lo que estaremos haciendo es proponer un límite para delta "x" el cual lo expresaremos como:

$$\lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\delta A}{\delta x} = f(x)$$

¿Qué significa que hallamos obtenido $f(x)$, el cual es el valor de la función original?, lo que nos dice esta conclusión es que si tenemos una función $y=f(x)$ y queremos encontrar el área debajo de esta gráfica, lo que podremos hacer será tomar el valor de la función como resultado del área estábamos buscando.

Esta respuesta también la podremos emplear en problemas prácticos en donde estemos buscando encontrar la velocidad a la que cambia el área con respecto a los cambios en "x", pues ahora ya sabemos que su valor no es más que el valor de la función.

Para verlo de otra manera simple, cuando aumentamos un poco el valor de la distancia "x", se agrega una pequeña porción al área cuyo ancho es muy pequeño y cuya altura es el valor de la función misma, por lo que la velocidad a la que cambia el área con "x" es igual en valor a la altura, que es el valor $f(x)$ de la función $y=f(x)$.



Cierre

Durante estos temas hemos explorado los desafíos que condujeron al desarrollo del cálculo diferencial, centrándonos en el problema fundamental de determinar la recta tangente a una curva en un punto específico. Desde los antecedentes históricos hasta la formalización del problema en el cálculo, hemos analizado cómo matemáticos como Fermat y Descartes utilizaron enfoques intuitivos para abordar este problema, demostrando su ingenio y creatividad.



Práctica de aprendizaje



Para comprender con mayor claridad el teorema fundamental propuesto por Newton, te solicitamos que leas el siguiente texto, al finalizar responde el cuestionario.

¿Por qué Newton fue capaz de plantear la relación entre el área y la tangente?

Newton fue capaz de descubrir esta relación gracias a su enfoque como físico y científico, en lugar de ver al cálculo diferencial e integral como dos cálculos matemáticos independientes, él observó cómo se podían aplicar estos conceptos matemáticos a fenómenos de la naturaleza en lo que se daban cambios proporcionales en los gráficos que expresaban una relación.



Figura 15. Tren A.V.E que viaja de Madrid a Barcelona

A partir de la relación entre la física y la matemática, Newton plantea los cambios y relaciones que se presentan en el análisis de los objetos en movimiento. Como ejemplo de lo propuesto por Newton estudiemos el movimiento de un tren, digamos que viajamos de Madrid a Barcelona en el tren A.V.E. que va aproximadamente a una velocidad constante de 300 km/h, de esta forma en la gráfica de velocidad se puede expresar así.

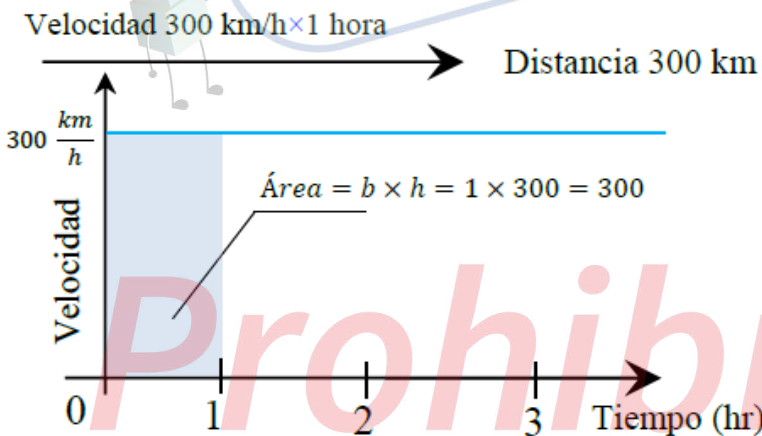


Figura 16. Gráfico de velocidad, en donde representamos la velocidad del tren como una función constante, en donde la velocidad no se modifica.

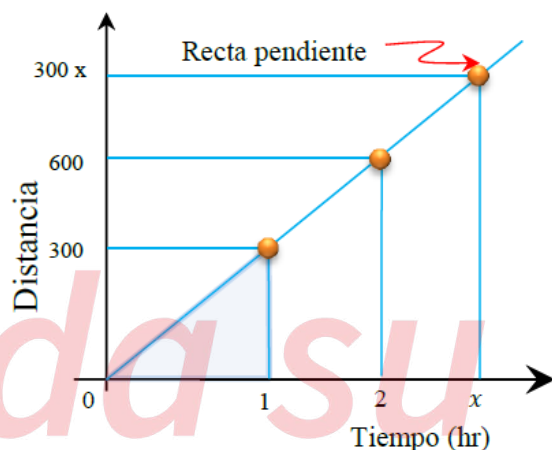


Figura 17. Gráfico de distancia durante la primera hora.

Conforme esta grafica ¿qué distancia recorrerá este tren en una hora? Dado que la distancia es igual a la velocidad x el tiempo, ($d=v \times t$), multiplicamos el ancho que es 1, ya que es una hora, y la altura es 300 km/h, por lo tanto el área es 300 lo cual se puede interpretar como que la distancia recorrida es de 300 km.

Ahora, echemos un vistazo al grafico de distancia y comparemos ambos gráficos, como vemos el valor del área cuando ha pasado 1 h y el valor de la distancia después de 1 h coinciden, es decir que el valor del área y el valor de la distancia es el mismo.

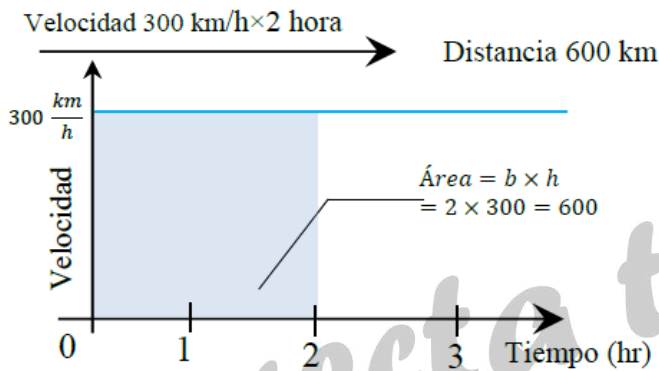


Figura 18. Gráfico de velocidad a las 2 horas

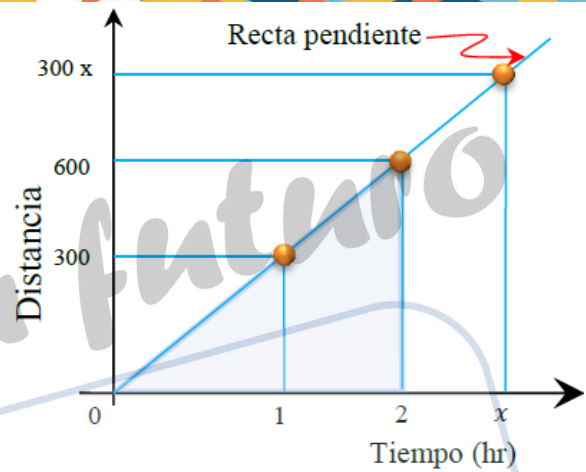


Figura 19. Gráfico de distancia durante la segunda hora.

Siguiendo con nuestro análisis ahora podríamos preguntarnos ¿Cómo se verán los gráficos de área y distancia del tren bala después de dos horas? Al ser ahora la base igual a 2 el valor del área es 600, (ya que $2 \times 300 = 600$), por lo que la distancia recorrida es también 600 km. Si observamos cual es la distancia en el otro grafico podemos observar que después de 2 h la distancia es igual a 600; como se puede ver existe una relación entre ambos gráficos, la cual se puede interpretar como que a partir de la gráfica de área en donde se representa la velocidad constante en realidad también se muestra la distancia recorrida del tren después de cierto tiempo.

A modo de prueba, si consideramos el tren bala después de "x horas", la distancia recorrida será $300x$, y si representamos a la distancia como "Y", veremos una nueva gráfica de la distancia, en donde $Y = 300x$. Como ves a partir de una grafica de velocidad (ver figura 20) hemos derivado el resultado hacia una gráfica de distancia (ver figura 21).

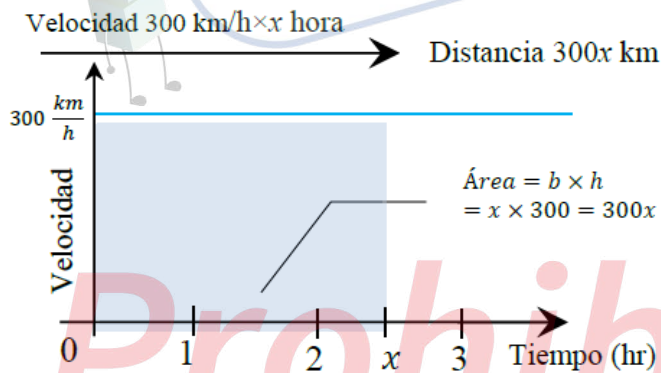


Figura 20. Gráfico de velocidad a las x horas

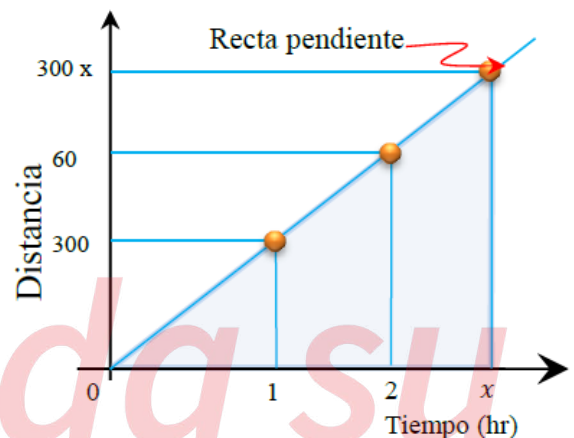
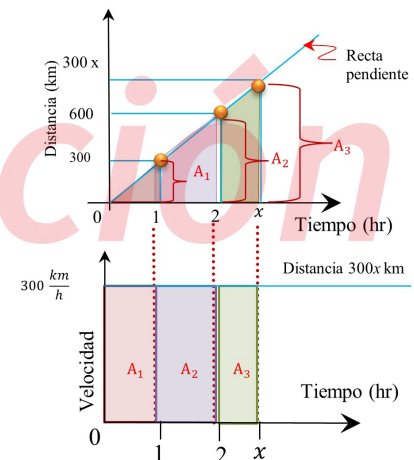


Figura 21. Gráfico de distancia durante la hora x.

Como vemos existe una relación entre el valor del área en el gráfico de velocidad y la altura de la recta pendiente de la gráfica de distancia, en este grafico podemos ver que a mayor área mayor es la altura de la pendiente. Esto también significa que podremos realizar una relación inversa en donde si ahora de manera contraria manipulamos la altura en "y" de la pendiente de la recta en el gráfico de distancia, podremos conocer que resultado se obtiene en el área del gráfico de velocidad.



La manipulación de la variación que sufre la ordenada (valor en y) de la recta tangente a la curva cuando la variable independiente incrementa o disminuye en es también conocida como la diferencial. En otras palabras al obtener la diferencial obtendremos los cambios en los valores en "x" y por lo tanto en el área del gráfico de velocidad.

De estas gráficas deducimos que si diferenciamos la distancia, obtenemos velocidad. Y a la inversa sucede lo mismo, como calcular el área es una integración, podemos decir que si integramos la velocidad, obtendremos la distancia. De hecho, el cambio en el área para la velocidad y la gráfica de la distancia coinciden.

Como podemos deducir, la derivada de la distancia es la velocidad, y la integral de la velocidad está fuertemente relacionada con la distancia. Newton llamó a esta relación una relación inversa.

Questionario

Conforme la lectura responde las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál fue el enfoque distintivo de Newton que le permitió descubrir la relación entre el área y la tangente en el cálculo diferencial e integral?

2. ¿Cómo se expresa la relación entre la distancia recorrida y la velocidad constante en un tren utilizando gráficos y fórmulas matemáticas?

3. ¿Qué revela la coincidencia entre el valor del área en el gráfico de velocidad y la altura de la recta pendiente en el gráfico de distancia sobre la relación entre estos dos conceptos?

4. ¿Cuál es la relación entre la diferencial (recta pendiente) y los cambios en los valores de "x", y por ende, en el área del gráfico de velocidad?

5. ¿Cómo se relaciona la derivada de la distancia con la velocidad y la integral de la velocidad con la distancia, según la perspectiva de Newton sobre esta relación?



Práctica transversal



Lee con atención el siguiente texto

El cálculo diferencial e integral en la física

Durante la educación media superior, se suele afirmar que el cálculo diferencial e integral representa un desafío particular, debido a la complejidad de los símbolos y fórmulas que pueden dificultar su comprensión para muchas personas.

No obstante, una vez que se comprende el cálculo diferencial e integral, se revela cómo este se aplica fácilmente a numerosos aspectos de nuestras vidas. Podemos explorar el concepto del cálculo diferencial e integral utilizando una noción básica y familiar, como lo es el movimiento de un vehículo visto desde la perspectiva de la Física y las Matemáticas elementales.

Veamos qué implican la diferenciación y la integración, para entenderlo mejor, consideremos cómo se aplican estos conceptos a las relaciones entre “distancia”, “tiempo” y “velocidad” en matemáticas.

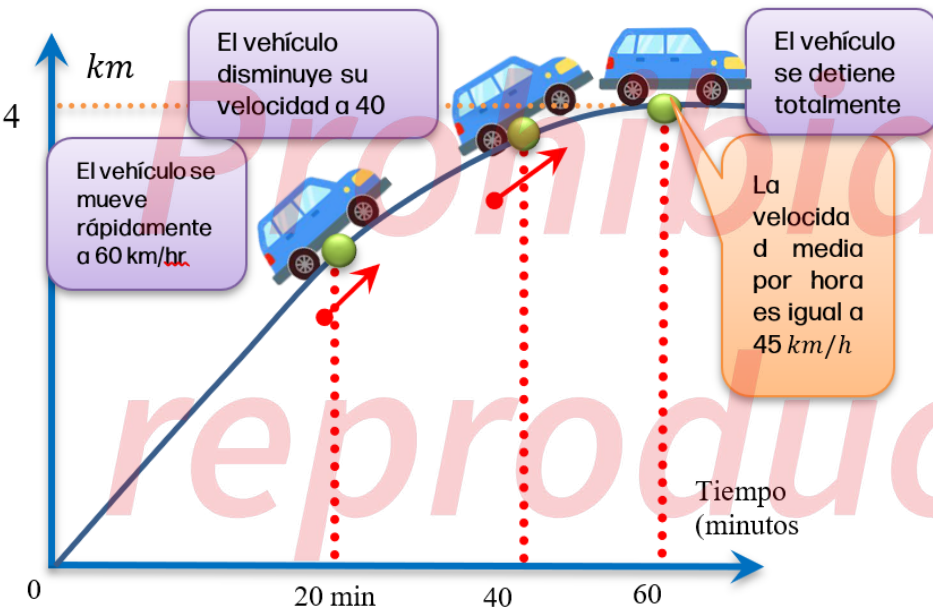
La diferenciación consiste en comprender los cambios instantáneos “analizando minuciosamente las situaciones”. Por ejemplo, si un automóvil se desplaza a 45 kilómetros por hora, su velocidad se calcula utilizando la fórmula: $Velocidad = \frac{Distancia}{Tiempo}$.

Si conocemos la distancia recorrida y el tiempo empleado, podemos derivar un valor único llamado “velocidad”. Sin embargo, como se vio en el ejemplo que se desarrolla durante un viaje del Puerto de Veracruz a la Ciudad de México durante el cálculo de la Tasa de Variación instantánea, en la realidad, la velocidad no es constante; esta puede aumentar gradualmente desde el reposo, ajustarse según las condiciones del camino, el número de pendientes que reducen o aumentan la velocidad, inclusive disminuir la velocidad hasta detenerse en un semáforo, todo esto puede ocurrir en una hora. De ello que el tipo de “velocidad” que estudiamos en matemáticas es la “velocidad promedio”.

Todos estos cambios se pueden medir, gracias a que los automóviles están equipados con velocímetros que muestran con precisión los cambios de velocidad de momento a momento.

Entonces, ¿cómo podemos determinar la velocidad exacta de un automóvil en un instante específico? Si se quiere encontrar la velocidad en un punto “x”, se necesita hallar la velocidad instantánea, en donde h tiende a cero, lo que se expresa como:

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



Como sabemos ahora la expresión anterior es una forma de representar la derivada en un punto, sin embargo, otra forma de representarlo cuando consideramos a los dos elementos de la velocidad, "distancia" y "tiempo" es representándolos como:

$$\text{Velocidad instantánea} = \frac{\text{Cambio de distancia muy pequeño}}{\text{Cambio de tiempo muy pequeño}}$$

Esta aproximación del concepto de velocidad hacia cero la podemos entenderlo así: La velocidad instantánea se logra dividiendo los cambios de distancia y tiempo en partes minúsculas infinitesimales, y al examinar estos pequeños cambios con detalle se denomina «diferenciación».

Por otro lado, la integración consiste en acumular, reunir y sumar secciones o áreas que están separadas o divididas. La integración permite sumar cambios instantáneos de un objeto en movimiento de tal forma que se puede determinar la cantidad total de desplazamiento.

De esta forma si la derivada intenta fragmentar en un sinnúmero de partes un total para irse aproximando de a poco hacia un límite, la integral intenta acumular y reunir esas partes para sumarlas, como ves es por ello que se dicen que son conceptos opuestos

Volviendo al ejemplo de la velocidad, si un automóvil viajó durante una hora y su velocidad se dividió en tres secciones, encontramos que alcanzó una velocidad de 60 km/h durante los primeros 20 minutos (o bien 0.333 horas), 40 km/h durante los siguientes 20 minutos (o bien 0.333 horas) y 35 km/h durante los últimos 20 minutos.

Si calculamos la distancia recorrida por este automóvil en una hora utilizando la fórmula "*Distancia=Velocidad×Tiempo*", obtenemos 20 km para los primeros 20 minutos, 13.33 km para los siguientes 20 minutos y 11.77 km para los últimos 20 minutos, lo que suma aproximadamente un total de 45 km.

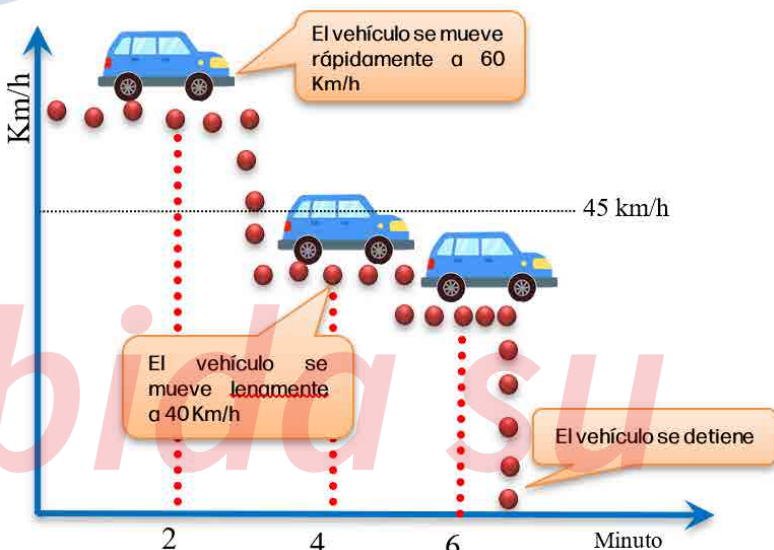
En este caso, la velocidad del automóvil en cada sección se considera simplemente como la "velocidad promedio", lo que significa que dentro de todo el recorrido la velocidad puede cambiar constantemente y puesto que la velocidad promedio es solo un cálculo aproximado, la distancia que se obtiene mediante esta velocidad promedio también será aproximada.

Para calcular la distancia recorrida con mayor precisión podemos realizar mediciones de intervalos extremadamente pequeños, de tal forma que obtengamos una distancia probable que se acerca más al resultado verdadero, esta distancia se expresará como:

$$\text{Distancia probable} = (V.I.) \times (t) + (V.I.) \times (t) + \dots$$

En donde, (V.I.): Velocidad Instantánea y (t): Un pequeño lapso de tiempo.

Al sumar todos estos fragmentos de distancia, se obtiene una distancia probable extremadamente precisa. En donde la integración de estos pequeños cambios para encontrar la cantidad total se llama integración.



Cuestionario

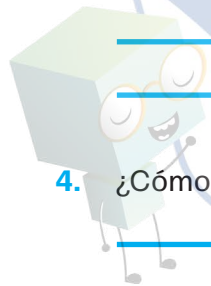
Conforme lo aprendido responde las siguientes preguntas.

1. ¿Cómo se define la diferenciación y qué implica en términos de cambios instantáneos?

2. ¿Cómo se puede entender la integración en términos de acumular y reunir cosas que están divididas?

3. ¿Cuál es el propósito de calcular la velocidad instantánea en un instante específico?

4. ¿Cómo se calcula la distancia recorrida con mayor precisión utilizando la integración?



Proyecta tu futuro
PLANEA
Editorial

Prohibida su
reproducción

Aplicaciones de funciones de variable real



Apertura

Las funciones son herramientas que podemos emplear para describir diferentes relaciones del mundo real en términos matemáticos. Como ejemplo, mediante el uso de las funciones podemos expresar en términos matemáticos el movimiento de un objeto o cuerpo a lo largo del tiempo, proporcionando así herramientas precisas para modelar y predecir su trayectoria. Por ejemplo, en la mecánica clásica, las ecuaciones del movimiento de Newton describen cómo la posición, la velocidad y la aceleración de un objeto cambian en función del tiempo. Estas ecuaciones se expresan a menudo mediante funciones como las ecuaciones de posición, velocidad y aceleración, las cuales pueden ser funciones de variables como el tiempo. Además, funciones como las trigonométricas se utilizan para describir movimientos oscilatorios o periódicos, como el movimiento armónico simple.

Por otro lado, las funciones matemáticas también son cruciales para describir fenómenos sociales como el crecimiento poblacional en términos matemáticos. En el estudio de la demografía, modelos como el de crecimiento exponencial y el modelo de crecimiento logístico se utilizan comúnmente para representar cómo cambia el tamaño de una población en función del tiempo. Estos modelos se basan en ecuaciones que relacionan la tasa de crecimiento de la población con la población actual y pueden incluir factores como la tasa de natalidad y la tasa de mortalidad.

Un ejemplo de ello lo podemos observar al graficar la función de nacimientos registrados anualmente en México desde 1990 hasta el 2024, en esta representación del comportamiento de nacimientos podemos deducir que estos van a la baja, también observamos durante 2019 y 2020 estos tuvieron un fuerte descenso debido a la pandemia del Covid-19.

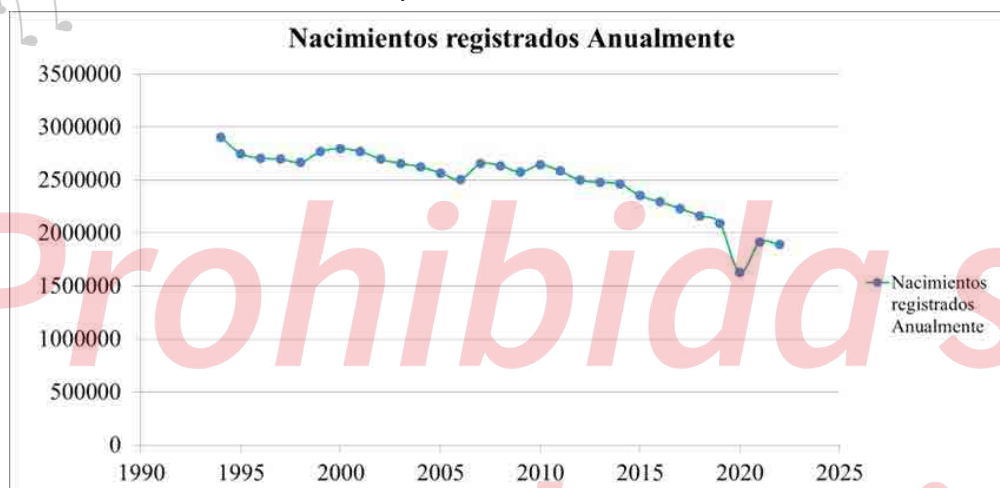


Figura 22. Nacimientos registrados anualmente presentados desde 1990 al 2022.

<https://www.inegi.org.mx/temas/natalidad/>

De esta forma, las funciones matemáticas permiten analizar y comprender el comportamiento dinámico de las poblaciones humanas y animales, lo que resulta fundamental para la planificación y la toma de decisiones en diversos ámbitos, desde la salud pública hasta en áreas de la biología relacionadas con la conservación de recursos naturales.



Situaciones cotidianas bajo la lupa matemática

Mediante el uso de las funciones podremos examinar casos específicos de fenómenos naturales y artificiales en los cuales el concepto de “cambio” desempeña un papel fundamental y arraigado a la naturaleza de estos fenómenos. Es decir que mediante las funciones podremos comprender cómo ocurre el cambio en diferentes situaciones y casos de estudio, en donde se identificaran los factores que lo impulsan y entender las consecuencias que tiene en el sistema en cuestión.

Por ejemplo, en el caso del movimiento físico de objetos, a través del uso de funciones se podría estudiar cómo la fuerza aplicada a un objeto o cuerpo provoca un cambio en la velocidad y dirección que este desarrolla. Pensemos, en el movimiento de un automóvil, podemos examinar cómo la aplicación de la fuerza del motor afecta su velocidad y cómo la fricción con la superficie de la carretera influye en sentido opuesto a su movimiento.

Un ejemplo clásico en Física, es la modelación del movimiento de un automóvil en una dimensión, el cual sigue una trayectoria en línea recta después de aplicarle una fuerza constante. Para presentar este ejemplo utilizaremos las ecuaciones básicas del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA), para ello, supongamos que el automóvil tiene una masa “ m ” y aplicamos una fuerza constante “ F ” sobre él. La aceleración resultante será $a=F/m$, de acuerdo con la segunda ley de Newton.

Ahora, la velocidad del automóvil cambiará con el tiempo según la relación:

$$v(t) = v_0 + at$$

en donde:

- $v(t)$: es la velocidad del automóvil en un momento “ t ” después de iniciar el movimiento.
- v_0 : es la velocidad inicial del automóvil (en $t=0$).
- a : es la aceleración constante.

Integrando esta expresión, podemos obtener la posición del automóvil en función del tiempo:

$$x(t) = x_0 + v_0t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

en donde:

- $x(t)$: es la posición del automóvil en un momento “ t ” después de iniciar el movimiento.
- x_0 : es la posición inicial del automóvil (en $t=0$).

Si ahora nos enfocamos hacia las ramas sociales de la ciencia, mediante el análisis de los gráficos y modelación de funciones podremos comprender los diferentes fenómenos sociales en los cuales se emplea el concepto de cambio. Por ejemplo, se pueden analizar los factores de cambio que influyen en una sociedad como el tamaño de la migración, la composición de una población a lo largo del tiempo (número de personas jóvenes, en edad media, edad avanzada y en la vejez) y el crecimiento poblacional.

Un ejemplo sencillo para analizar los cambios en la situación financiera de una población es mediante el modelo de crecimiento económico. Este modelo de crecimiento exponencial se basa en la idea de que el crecimiento económico de una población puede expresarse mediante una función matemática que se asemeje a una función exponencial, la cual se puede expresar de la siguiente manera:

$$P(t) = P_0 \times e^{r \cdot t}$$

en donde:

- $P(t)$: es la población en el tiempo t .
- P_0 : es la población inicial en el tiempo $t=0$.
- r : es la tasa de crecimiento de la población.
- e : es la base del logaritmo natural (aproximadamente igual a 2.71828)

Modelando variaciones mediante operaciones básicas

Cada uno de los casos mencionados anteriormente son un ejemplo de la relación entre una variable, conocida como variable de entrada "x", y una segunda variable "y", llamada variable de salida. Mediante las funciones podemos identificar la regla mediante la cual se establece una relación entre dos variables, mediante la identificación de esta regla se puede asignar exactamente un valor para cada variable de salida conforme su correspondiente valor de entrada.

Una forma sencilla en cómo podemos comprender lo que es una función es viéndola como una máquina que es capaz de convertir un valor de entrada que se coloca en su embudo, lo procesa en su interior mediante una regla y finalmente lo arroja convertido en otro objeto, que sale por su canal como un valor de salida.

Otra forma de representar una función es mediante un diagrama de flechas como el que se muestra en la figura adjunta. En este diagrama cada flecha relaciona a un elemento del grupo A llamado "Dominio" con un elemento del grupo B conocido como "Codominio".

Dentro de este diagrama, la flecha indica que el valor de salida $f(x)$ está asociada con el valor de entrada x , por otro lado la flecha en $f(a)$ nos indica que este valor de salida está asociado con el valor de entrada a , etcétera.

Para comprender mejor aún este diagrama se buscará aclarar las diferencias entre los conceptos de dominio, codominio y rango de una función.

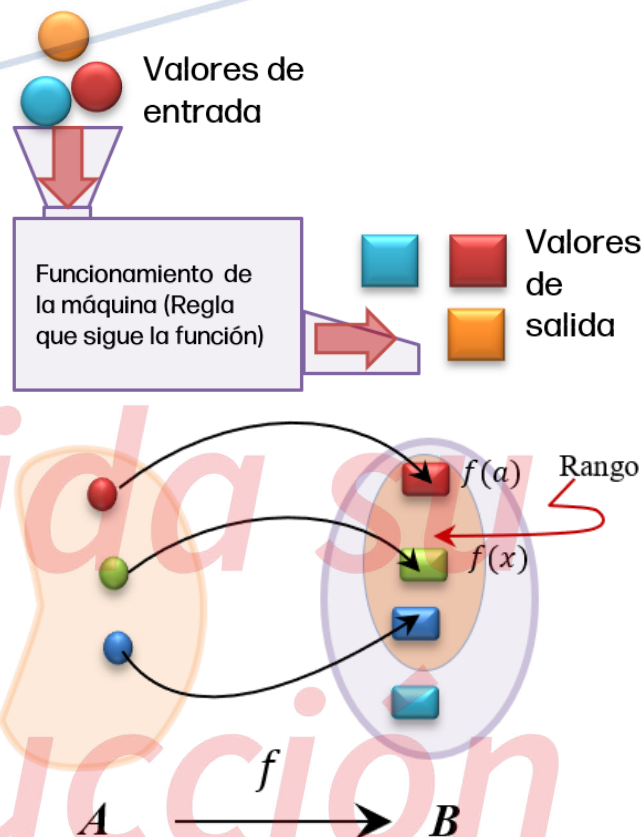


Figura 23. Diagrama de flechas para representar a una función (f).

reproducción

Dominio de una función

Se entiende como el conjunto de todos los valores de entrada para los cuales la función está definida. En otra conceptualización, el dominio se entiende como la colección de todos los posibles valores que puede tomar la variable independiente.

Codominio de una función

Se comprende por codominio de una función al conjunto de todos los posibles valores de salida que se podría producir al introducir valores de entrada en la función. En otras palabras es el conjunto de todos los valores de la variable dependiente que podrían generarse como resultado de aplicar la regla de una función.

Rango de una función

Conceptualmente el rango de una función se define como el conjunto de todos los valores reales que produce una función como resultado de haber introducido valores de entrada. A diferencia del codominio el rango únicamente hace referencia a los valores que se obtienen y no a los que podrían generarse. Otra forma en cómo se puede ver al rango es como un subconjunto del codominio, en donde se engloban únicamente los valores obtenidos de ejecutar la regla de la función.

Glosario

Función real

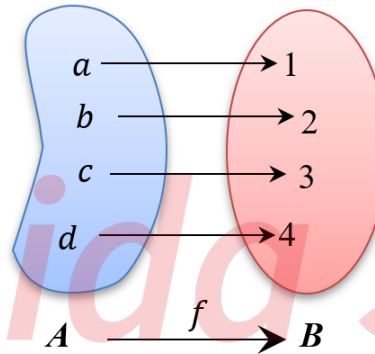
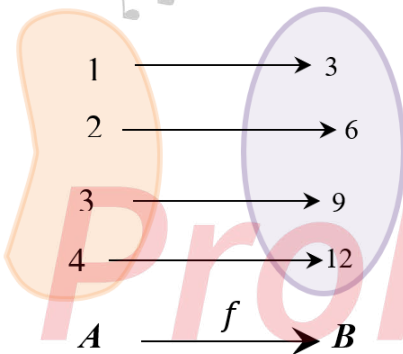
Es una función cuyo dominio (D), codominio y rango (R) pertenecen al conjunto de los números reales (\mathbb{R}).

Funciones reales

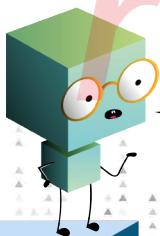
Es un concepto matemático que describe la relación entre un conjunto de valores de entrada expresados en números reales y un conjunto de valores de salida expresados también en números reales en simples palabras, una función real toma un número real como entrada y produce otro número real como salida.

Otra condición para que una correspondencia sea considerada como una función real, es que esta debe cumplir con la condición de unicidad, es decir que para cada valor del dominio le corresponderá únicamente un valor en el codominio.

A continuación, veamos estos dos ejemplos en donde se buscará que se comprenda con mejor facilidad que es una función real.



Recuerda que los números reales (\mathbb{R}) son el conjunto de números que integran o agrupan a los números naturales (N), enteros (Z), racionales (Q) e irracionales (I).

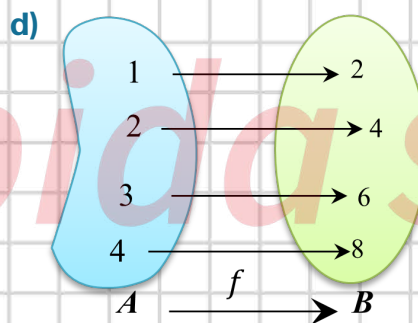
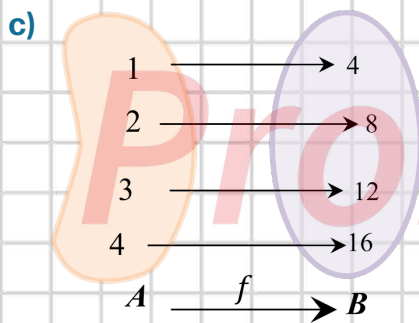
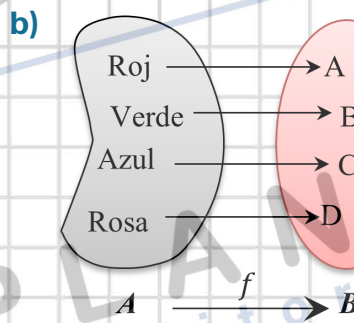
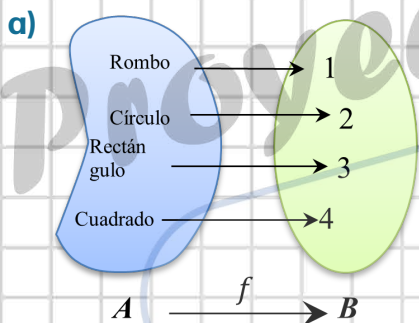




Práctica de aprendizaje



Es tu turno de responder si las siguientes funciones cumplen con los requerimientos para ser considerada como una función real. Para orientarte en este ejercicio, se ha respondido el primer inciso.



reproducción



Métodos para representar una función real.

Para mostrar la regla que rige exactamente sobre los valores de salida por cada valor de entrada de una función se pueden emplear cuatro métodos, entre los cuales están el uso de datos numéricos, la representación mediante un gráfico, a partir de la descripción verbal y a través de una ecuación.

Para representar numéricamente a una función, lo podemos hacer mediante el método de “parejas ordenadas”, A través de este método se indicara la correspondencia entre los valores de la coordenada “x” y la coordenada “y” de una función, para ello estos valores se dispondrán en pares de valores dispuestos en paréntesis y separados por una coma.

$$f(x) = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_5, y_5), (x_n, y_n)\}$$

Por otro lado para representar gráficamente a una función será necesario que construyamos una tabla, en donde se muestren los valores de la coordenada “x” y la coordenada “y” de una función.

Ejemplo. El costo de la gasolina frente a la cantidad de gasolina que fue vendida.

x=Costo de la gasolina	1	2	3	4	5
f(x)=Cantidad de gasolina vendida, (precio en pesos)	20.53	41.06	61.59	82.12	102.65

Tabla 1. Precio de la Gasolina

Posteriormente a la construcción de la tabla, en la representación gráfica de una función se suele hacer una representación en el plano cartesiano en donde se emplean un conjunto de puntos (x, y) . Esta es la forma más práctica y cómoda para representar un conjunto de valores vinculados mediante una relación, en donde a partir de interacción de dichos puntos en el plano podemos observar la relación que existe entre el dominio y el codominio de la función $y=f(x)$. Un ejemplo de representación gráfica de una función se muestra en la figura adjunta.

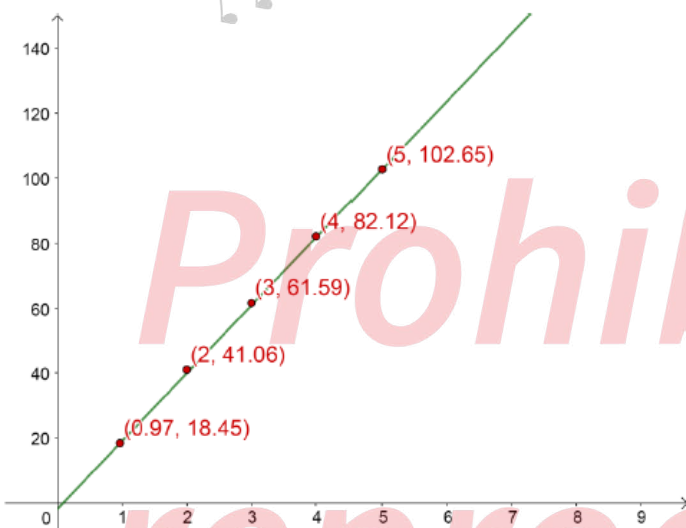


Figura 24. Representación gráfica de una función

x: La variable independiente (valor de entrada).

y: La variable dependiente (valor de salida).

Con respecto al método de descripción verbal empleado para puntualizar la relación de una función, en este se emplean palabras que nos indican la regla que existen entre el dominio (valor en x) y el codominio (valor en y) de la función. Por ejemplo, mediante palabras como “el resultado es el doble de”, “es el triple de”, “se eleva al cuadrado”, etcétera. Estos son términos que nos indican el producto que se obtiene después de haber introducido un valor de entrada “x” dentro de la función.

Si deseamos describir una función mediante una ecuación deberemos expresar de forma algebraica la regla que vincula a las dos variables dentro de una función, las cuales serían:

La notación que se emplea comúnmente para expresar de forma algebraica a las funciones es $y=f(x)$, esta se lee como “el valor de y está en función del valor de la variable x ” o “el valor de y depende de del valor en x ”, esto significa que al calcular $f(x)$ obtenemos un valor de salida de la función. Como ejemplo de la expresión de las funciones a partir de una ecuación en la forma $y=f(x)$ tenemos la siguiente expresión:

$$f(x)=2x+5$$

Dónde:

- $f(x)$ representa la variable dependiente.
- x es la variable independiente.
- La expresión $2x+5$ es la regla de la función que describe cómo se relacionan los elementos del dominio con los del codominio.

Otro ejemplo de una función real se presenta mediante la forma $y=ax$, en donde $a>0$ y $a\neq 1$. En esta expresión conocida como “función exponencial” la variable x se encuentra en el exponente y la base de dicha potencia es una constante positiva, distinta de 1.

Las funciones exponenciales son funciones reales las cuales poseen su dominio en los números reales (\mathbb{R}) que se caracterizan por poseer una tasa de crecimiento directamente proporcional al valor de la función. Esta característica propia de las funciones exponenciales permite que a través de estas los matemáticos puedan modelar eficazmente muchas situaciones de la vida diaria que se dan en la naturaleza y nuestro entorno.

Un ejemplo en donde se utilizan las funciones exponenciales es en el estudio de microorganismos, por ejemplo, se estudian a las levaduras las cuales se utilizan para favorecer los procesos de fermentación dentro de alimentos como el pan y en la producción del vino.

La forma en como se reproducen y crecen las células de levadura es de forma exponencial, conforme algunos experimentos se sabe que las células de levadura se triplican cada hora, de esta forma a partir de 2.5 g de levadura después de horas se habría formado la siguiente masa de levadura:

Tiempo en horas (t)	Masa en gramos (m)
0	2.5
1	7.5
2	22.5
3	67.5
4	202.5
5	607.5
6	1822.5
7	5467.5
8	16402.5

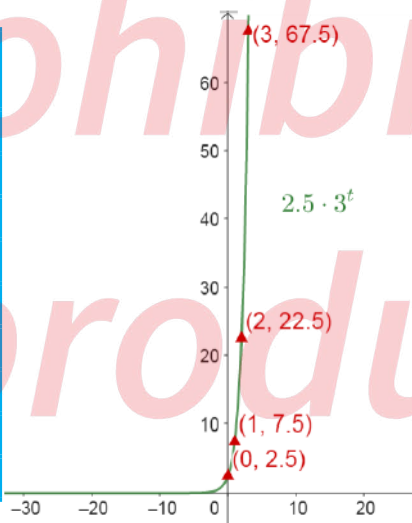


Figura 25. Representación grafica de la ecuación $m(t)=2.5 \cdot 3^t$

La función que se ha obtenido a partir de esta tabla se puede describir mediante la ecuación $m(t)=2.5 \cdot 3^t$, en donde la variable independiente t que aparece en el exponente del término de la función pertenece a los números naturales ($t \in \mathbb{N}$).

Glosario

Función exponencial

Las funciones con una ecuación de la forma $f(x)=a^x$ se llaman funciones exponenciales, en donde “ a ” pertenece a los números reales (\mathbb{R}) y es mayor que cero y diferente de 1, ($a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ y $a \neq 1$). En donde para esta definición, el caso en donde $a=1$ está excluido de esta ya que si $a=1$ entonces al sustituirlo dentro de la forma $f(x)=a^x$ obtendríamos $1x=1$, lo cual nos da como resultado a una función constante $f(x)=1$. Además, dado que los valores de una función exponencial son todos positivos, “ a ” debe ser mayor que cero ($a > 0$), por lo que las funciones exponenciales no tienen ceros. El dominio (D) para las funciones exponenciales es el conjunto de todos los números reales, por otro lado el rango (R) para una función exponencial es el conjunto de todos los números reales positivos.

Aplicaciones interdisciplinarias del modelado de funciones de cambio

El modelado de funciones es un proceso matemático fundamental que implica la representación de relaciones entre variables. Consiste en encontrar una expresión matemática que describa de manera precisa y concisa el comportamiento de una función en términos de valores de entrada " x " y sus valores de salida $f(x)$. Esto implica identificar patrones, relaciones y características clave dentro de los datos para crear un modelo que exprese esta relación, así como que también pueda predecir y explicar el comportamiento de la función en diferentes situaciones.

El modelado de funciones es considerado como una herramienta poderosa e indispensable para observar los cambios que tienen las variables en diversas disciplinas, por ejemplo, en áreas como la economía, la biología y la física, el uso del modelado de funciones y su representación gráfica han demostrado ser una herramienta invaluable para comprender y prever fenómenos complejos.

Como un ejemplo de modelado de funciones empleado en economía tenemos un modelo básico de oferta y demanda para un producto que se mueve dentro de un mercado competitivo, mediante este podremos comprender y predecir el comportamiento de variables clave en distintos contextos.

Dentro del modelo de oferta y demanda, representaremos a la demanda de un producto como $D(p)$, la cual puede modelarse como una función inversamente proporcional al precio " p ", es decir, $D(p) = a - bp$, en donde respectivamente " a " y " b " son parámetros que reflejan la disposición de los consumidores a pagar por un producto y la percepción de valor del producto acorde al precio.

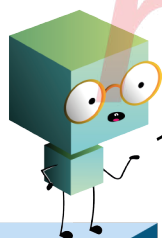
Por otro lado, la oferta $S(p)$ puede representarse como una función lineal $S(p) = cp + d$, respecto al costo o precio del producto " p ", en donde " c " indica la tasa de cambio de la cantidad ofrecida respecto al precio y " d " es el intercepto en el eje vertical. Cuando la cantidad demandada es igual a la cantidad ofrecida, $D(p) = S(p)$, se dice que el producto ha alcanzado su punto de equilibrio dentro del mercado, lo cual nos permite ofrecer un precio justo conforme a la demanda que tiene el producto en el mercado.



Cierre

En resumen, hemos explorado la importancia del cambio en diversos fenómenos, desde el movimiento físico hasta fenómenos sociales como lo es el crecimiento económico poblacional. También hemos analizado cómo los conceptos de funciones reales nos ayudan a modelar estos cambios, utilizando herramientas como gráficos y ecuaciones. Además, hemos examinado casos de estudio en campos como la biología cuando observamos a partir de un gráfico la reproducción y crecimiento las células de levadura, destacando cómo el modelado matemático de la oferta y demanda. Como se pudo apreciar, el estudio de las funciones reales nos permite comprender mejor el mundo que nos rodea y desarrollar soluciones innovadoras para los desafíos que enfrentamos.

El intercepto en el eje vertical es el punto en el que una línea, curva o función interseca el eje vertical Y de un sistema de coordenadas. En el contexto de la economía, específicamente en el modelo de oferta y demanda mencionado anteriormente, el intercepto en el eje vertical de la función de oferta representa el valor de la cantidad ofrecida cuando el precio es cero. Esto puede interpretarse como la cantidad mínima que los productores están dispuestos a ofrecer al mercado sin importar el precio.





Práctica de aprendizaje



Identifica elementos en funciones, observa el ejemplo.

Resistencia a la tensión. Considere el gráfico (Figura 26) el cual muestra la prueba habitual para determinar las propiedades mecánicas del acero, la cual es conocida como la prueba de tensión directa, en esta una varilla de acero se estira lentamente en tensión hasta que se rompe.

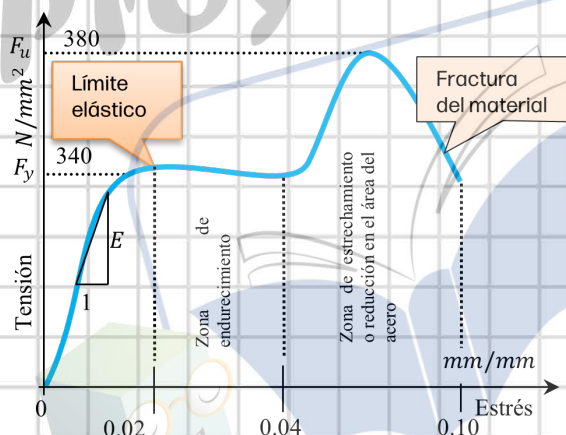


Figura 26. Gráfica esfuerzo deformación del acero

- Identificar el conjunto de entradas y el conjunto de salidas.
- ¿Es la relación representada en la figura una función?
- Entre que valores en x el acero entra en la zona de endurecimiento
- Entre que valores en x el acero sufre una reducción en su área transversal haciendo que este se estreche.

Prohibida su reproducción

Para los incisos mostrados a continuación realiza las siguientes acciones en cada una de los siguientes enunciados.

- a) Identificar la representación de la relación como numérica, algebraica, verbal o gráfica.
- b) Indica la descripción y las unidades de medida de las variables de entrada y de salida,
- c) Indicar si la relación es una función o no.
- d) Si la relación es una función, dibuja un diagrama de entrada/salida; si la relación no es una función, explica por qué no lo es.

1. Riesgo de diabetes. El riesgo, como porcentaje, de que un mexicano promedio desarrolle diabetes está relacionado con el porcentaje de sus familiares dentro de dos generaciones que han tenido diabetes. (Utiliza "" para representar al porcentaje de sus familiares y para representar la función o relación).

2. Puntajes de exámenes. El puntaje bruto de un estudiante en un examen de ingreso con 40 preguntas ponderadas con igual valor para cada inciso, matemáticamente se puede expresar como cuando obtiene "x" respuestas correctamente.

3. Ventas de consolas y videojuegos. El gráfico muestra las ventas de Consolas y Videojuegos entre 2005 y 2008.

